Es conveniente señalarles que las tasas de interés utilizadas, no necesariamente coinciden con los que se manejan hoy por hoy, esto debido a la volatilidad de los mercados financieros. Deben recordar, que las tasas reales que más utilizan los bancos e instituciones financieras y comerciales en nuestro país, se determinan sumando puntos porcentuales o porcentajes a:

- **La tasa líder, es decir la tasa de rendimiento que ofrecen los CETES a 28 días en su colocación primaria.**
- **El CPP, que es el costo porcentual promedio de captación en moneda nacional (MN)**
- **LA TIIE, que es la tasa de interés interbancaria de equilibrio.**

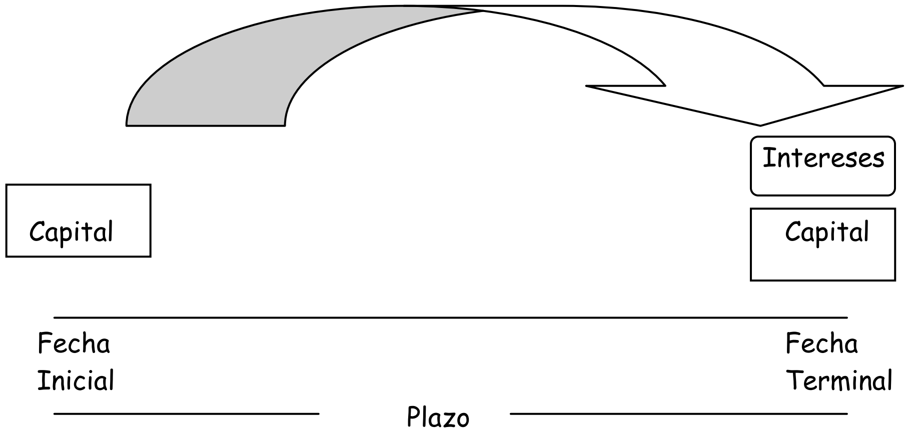
Las tasas listadas, obviamente son variables, y por tanto no se mantienen constantes. La TIIE como hemos platicado en clase se determina de acuerdo con las cotizaciones de los fondos que los bancos presentan a BANXICO. El CPP es la tasa oficial que BANXICO estima de acuerdo con los saldos de captación bancaria en un período mensual, para se aplicada en el siguiente mes. Lo mismo sucede con los UDIS, intereses de tarjetas de crédito e inversión, CETES, Factoraje como operación de descuento comercial, amortización de créditos con interés simple y saldos insolutos en compras en abonos.

¿Cómo define Ud. al interés? INTERES es el cambio en el valor del dinero en el tiempo. El dinero, como cualquier otro bien, tiene un precio que es el interés. Éste es el pago por el uso del dinero ajeno y se expresa con "I" Se dice que el interés I es el dinero que produce un capital al invertirlo, al otorgarlo en préstamo, que también es una inversión para el que presta, o al pagarlo por la adquisición de bienes y servicios en operaciones a crédito.

¿Algebraicamente cómo se define el interés? Si al transcurrir el tiempo, una cantidad determinada de dinero, C, se incrementa hasta otra, llamada M, por tanto el interés es $I=M-C$, donde C es el capital y M el monto del Capital, o sea, el capital original más el interés. Al Capital también se le llama "Principal", "Valor Presente" "Valor Actual". Para definir al MONTO, también se le llama "Monto del Capital", "Valor Futuro" "Montante", "Valor Acumulado" o simplemente "Monto".

¿Cómo se define al número de días u otras unidades de tiempo que transcurre entre las fechas inicial y final en una operación financiera? Se le llama plazo o tiempo

Los conceptos anteriores se grafican de la siguiente manera:



Se puede apreciar que el Monto (futuro) siempre es mayor al Capital (presente)
¿Cómo simboliza algebraicamente al Interés? La razón entre el interés I y el Capital C por unidad de tiempo se le llama tasa de interés, por lo tanto i=I/C

Si la tasa de interés es multiplicada por 100 se obtiene la tasa de interés en porcentaje o porciento. Por ello la tasa de interés es el valor de la unidad monetaria en el tiempo. Si está en porcentaje, éste será el valor de 100 unidades monetarias en el tiempo. Se le conoce como tipo de interés a la tasa de interés en por ciento, pero es más común que se llame porcentaje de interés o tasa de interés.

Una persona invierte $4000 y al término de un año recibe 5000 por su inversión.
Valor Presente= C= 4000,
Monto= M= 5000
Intereses = I= M-C = 5000-4000= 1000 por tanto la tasa de interés i=1000/4000 o sea el 0.25(100)=25% y el plazo n= un año

INTERÉS SIMPLE E INTERÉS COMPUESTO
¿Cómo se define al interés simple? Es tal, cuando sólo el capital gana intereses.

¿Cómo se define al interés compuesto? Es tal cuando si a intervalos de tiempo preestablecidos, el interés vencido se agrega al capital, por lo que éste también genera intereses.

¿Cuál es la tasa de interés simple anual, si con 2,300 se liquida un préstamo de 2000 en un plazo de 6 meses?

I=M-C I=2300-2000 I=300

Si el plazo n es 6 meses; n=1/2

Si ya vimos que I=Cin 300=2000(i)(1/2) de donde i=300(2)/2000 i=0.30 ó 30% simple anual

DESCUENTO

Cuando se obtiene un préstamo por un capital C, el deudor se compromete a pagarlo mediante la firma de un pagaré cuyo valor nominal es mayor normalmente que C, puesto que ya incluye los intereses. En la práctica se negocia el pagaré antes de la fecha de vencimiento, ofreciéndolo a un tercero, por ejemplo una empresa de factoring o factoraje a un precio menor que el inscrito en el pagaré, o sea con un descuento que puede tomarse de dos formas:

- **Descuento Real: Se calcula en base a M=C(1+in) donde M es el valor nominal**
- **Descuento Comercial: Se le llama así por su semejanza con las rebajas de los comerciantes. La adquisición de CETES es un ejemplo de inversiones que se manejan con descuento comercial, el cual se obtienes multiplicando el valor nominal del documento por el plazo y por la tasa de descuento.**
- **D=Descuento con valor nominal M D=Mnd d= tasa de descuento simple anual**

Descuento Comercial de un pagaré:

El descuento comercial de un documento con valor nominal de 6,500, tres meses antes de su vencimiento o sea n=3/12 puesto que así se representa el plazo en años, con un tipo de descuento del 22.4% simple anual:

D= 6,500(3/12)(0.224) = D= $364

Si al valor nominal VN del pagaré se le resta este descuento, entonces se obtendrá su valor comercial o valor descontado P por o que el precio será: P=6500-364 = P=6,136

Fórmula General= P=M-Mnd donde al factorizar M se obtiene P=M(1-nd)

Valor comercial de un pagaré:

¿Cuál es el valor comercial al 12 de mayo de un documento que ampara un préstamo de 6,500 recibido el 25 de enero pasado con intereses del 24% simple anual y cuyo vencimiento es el 30 de julio? Suponga que la tasa de descuento simple anual es de 25%

Primer paso: Encontrar el Valor Futuro VF de los 6,500 del préstamo a través de la fórmula del interés simple:

M=6500*[1+(186/360)(0.24)]=6500(1.124)=7,306

Con este VF, el plazo n=79/360 años y la tasa de descuento d=0.25, nos da el valor descontado.

P=7306(79/360)(0.25)] = 7,306(0.945138889) ó P=6905.18

¿En qué día se negocia en 16203 un documento con descuento del 23.8% simple anual?

Suponiendo que ampara un crédito en mercancía por 16,000 ¿Cuál fue la tasa de interés simple anual?

a) VN=17350 Valor en que se comercializa 16,203, la tasa de descuento d=0.238

16203=17350(1-n(0.238)), donde, 16203/17350-1=-n(0.238) = -0.06610951=-n(0.238)=

n=0.277771051 años y 0.27771051(360)=99.99758 días

Lo que significa que 100 días antes del 17 de febrero, el 9 de noviembre de 2012 el documento se comercializa a 16,203

b) El plazo entre el 17 de febrero y el 5 de octubre anterior es de 135 días, el capital es el valor de la mercancía C=16,000 el Monto M=17350 y la tasa i se obtiene despejándola de la ecuación siguiente:

17,350=16000(1+i(135)), donde (17350/16000)-1=i(135)

0.084375=i(135) i=0.084375/135 ó i=0.000625 diaria porque el plazo está dado en días. Para la tasa anual se multiplica por 360

0.000625(360) = 0.225 ó 22.50%

Descuento interbancario

Banamex descuenta a un cuentahabiente el 30% de interés simple anual de un documento con valor nominal de 3000 que vence 45 días después. El mismo día el Banco decuenta el

pagaré en Bancomer con el 27% anual ¿Cuál fue la utilidad para el Banamex?

El plazo es n=45/360, el Monto o VN es M=3000, la tasa de descuento es d=0.30, por tanto el capital que el cuentahabiente recibe por el documento es:
P=3000[1-(45/360)(0.30)]
P=3000(0.9625)
P=2,887.50

SI el capital que Bancomer recibe de Banamex dado que la tasa de descuento es d=0.27
P=3000[1-(45/360)(0.27)] = 3000(0.96625) = 2898.75

La diferencia entre los dos resultados es la utilidad de Banamex
U=2898.75-2887.50 =11.25
Debe notarse que esto es igual a la utilidad de los 3,000 al 3% en 45 días
U=3000(0.03)(45/360)=11.25 El 3% es la diferencia entre los porcentajes.

TAREA

1) **Defina o explique los conceptos de Descuento Real, Descuento Comercial, Valor Nominal y Valor Descontado de un documento.**
2) **¿Cuál es el valor comercial de un pagaré con VN de US 750 si se descuenta con el 33.5% simple anual 3 meses antes del vencimiento?**
3) **¿En cuánto se negocia el 15 de marzo un documento con valor nominal de $350,000 vencimiento al 15 de agosto y descuento del 37% simple anual?**
4) **¿Cuál es el valor nominal de un documento que 5 meses antes de vencer se negocia en 25,000 con un tipo del 32.5% de descuento simple anual?**
5) **¿Cuántos días antes del vencimiento se comercializa un pagaré en 4750 si su valor nominal es de 5,200 y el descuento es del 26.4% simple anual?**

6) **Obtenga la tasa de descuento simple anual de un documento cuyo valor nominal es de 2,400 y que se vende en 2,240 tres meses antes de su vencimiento**
7) **Una empresa descuenta un documento y recibe 8,700. Si la tasa de descuento es del 21.5% simple anual y el valor nominal es de 10,000 ¿Cuánto faltaba para su vencimiento?**
8) **¿Qué descuento se hace a un documento cuyo valor nominal es de 120,000, 75 días antes de su vencimiento y con una tasa del 31.8% de descuento simple anual?**
9) **Calcule la tasa de descuento que se aplicó a un documento cuyo valor nominal es de 175,000, si se descontó 90 días antes de su vencimiento y el descuento fue de 18,000?**
10) **¿Cuál es el valor de compra de los CETES a 28 días con valor nominal de 10 y al 25.3% de descuento simple anual?**
11) **¿En cuánto se negocia el 21 de junio un documento con valor nominal de 9,500 si vence el 15 de agosto y se descuenta el 29.3% simple anual?**
12) **EL 10 de febrero se compra una aparato electromecánico con un anticipo de 8,750 y un documento al 15 de junio por el 65% restante con intereses del 27.3% simple anual. Determine con la información anterior: a) El precio de contado b)El valor nominal del documento y c) El valor comercial del pagaré el 19 de marzo, considerando un descuento del 28.5% simple anual.**
13) **El 15 de octubre una tienda de abarrotes vende mercancía a crédito por 43,000 y recibe un pagaré que vence el 20 de enero siguiente. El 3 de noviembre realiza otra venta y le endosan un documento con valor nominal de 40,750y con vencimiento al 10 de febrero del año siguiente. ¿Cuánto recibe por los dos documentos al 21 de diciembre, si le descuentan el 34.5% simple anual? Suponga una tasa de interés del 31.8% simple anual en sus operaciones a crédito.**
14) **El 23 de febrero Bancomer descuenta a un cliente una tasa del 26.93% simple anual un documento que vence e el 15 de mayo siguiente, cuyo valor nominal es de 25,400. El mismo día el banco transfirió el documento a**

Banamex con un descuento del 24.5% simple anual. ¿De cuánto fue la utilidad para Bancomer?

15) El 19 de marzo, una empresa recibe un pago con un anticipo documentado por 180,000 mas intereses del 30.7% simple anual, que vence el 8 de julio siguiente: a)¿Cuál fue el costo de los materiales vendidos si el anticipo fue del 55%? b)¿Cuál será el valor comercial del pagaré el 3 de abril si se descuenta al 32.2% simple anual?

16) ¿Qué capital debe invertirse en una cuenta que paga el 33.6% anual capitalizable por meses para disponer de 13,000 en 7 meses?

17) ¿Cuánto se acumula en una cuenta de inversión que reditúa el 18.6% anual capitalizable por bimestres en un plazo de 2 años, si se invierten $35,000?

18) ¿En cuánto tiempo se liquidará un crédito de $175,000 con intereses del 24.96% compuesto por quincenas y un pago final de $230,000?

PRECIOS DE LOS FUTUROS SOBRE ÍNDICES DE PRECIOS DE LAS ACCIONES

¿Qué es un índice de acciones?

Un índice de acciones puede considerarse como el precio de un valor que va a pagar dividendos.

El valor es la cartera de acciones subyacentes al índice y los dividendos pagados por el valor, son los dividendos que habría recibido el dueño de esta cartera. Normalmente se supone que los dividendos proporcionan un rendimiento conocido en lugar de una cantidad monetaria conocida.

Si q es la tasa o % de dividendo, utilizaríamos la siguiente fórmula para conocer el precio del futuro, F_0:

$F_0 = S_0 e^{(r-q)T}$

Caso práctico:

Tomemos en consideración un contrato de futuros a 3 meses sobre Standard & Poors. Si suponemos que las acciones subyacentes al índice proporcionan un rendimiento por dividendo "q" del 1% anual, que el valor actual del índice "S0" es de 400, y que el tipo de interés continuo libre de riesgo es del "r" 6% anual.

¿Cuál es el valor del futuro?

En este caso se sustituyen valores:

$r = 0.06$
$S_0 = 400$
$T = 0.25$
$q = 0.01$
$e = 2.71828$

Este valor es siempre fijo para "e"

$F_0 = 400e^{(0.06-0.01) \times 0.25} = 405.03$

	+	-	X			400x1.012578	
	(0.06	0.01)	0.25		0.0125	F_0 =	
400.00		X		e	1.012578		405.03

Caso práctico:

Un contrato a plazo de 4 meses para comprar un bono cupón cero que vence dentro de un año a partir de hoy. El precio actual del bono es de 930 dólares. (Al bono le faltarán 8 meses para el vencimiento del contrato a plazo, entonces podrá considerar éste como un contrato a plazo para la compra de un bono cupón cero de 8 meses). Supondremos que el tipo de interés libre de riesgos de 4 meses (compuesto continuo) es el 6% anual. Los bonos al descuento no proporcionan ningún interés o renta. Calcule usted ¿Cuál sería el precio de entrega del contrato negociado el día de hoy? Se aplica la fórmula:

Solución: $F_0 = S_0 e^{r\,t}$

	+	x	/		= exponente
	0.06	4	12		0.0200
930				e =	2.71828

$F0 = S0e^{(r \times t)}$ 0.0200

e = 2.71828

$F0 = S0e^{(0.06 \times 4 / 12)}$ $'(2.71828)^{'0.02}$ = 1.020201326

F0 = 930 x 1.020201326 = 948.7872335

CONTRATOS A PLAZO Y DE FUTUROS SOBRE DIVISAS

El activo subyacente en este tipo de contratos se refiere a un cierto número de unidades en moneda extranjera. La variable S_0 es el precio de contado en dólares de una unidad de la divisa y F_0 es el precio a plazo o precio de futuros de una unidad de moneda extranjera. A la mayoría de las divisas diferentes a la libra esterlina, euro, dólar australiano y dólar de Nueva Zelanda, el tipo al contado o a plazo, normalmente se publica como el número de unidades de la moneda que equivalen al dólar.

Las divisas tienen la característica de que el propietario de las mismas puede ganar intereses libre de riesgo vigente en el país que corresponda. Por ejemplo, el propietario puede invertir en los bonos en cierta divisa. Si definimos r_f como el valor de este tipo de interés extranjero libre de riesgo cuando el dinero se invierte en el tiempo T.

r es el tipo de interés libre de riesgo cuando dinero se invierte durante este período.

$$F_0 = S_0 e^{(r - r_f)T}$$

Caso práctico:

Supongamos que los tipos intereses anuales a dos años en Australia y los Estados Unidos fueron del 5% y 7% respectivamente, y el tipo de cambio al contado entre dólar australiano (AUD) y el dólar de Estados Unidos (USD) es de 0.6200 USD por cada AUD. ¿Cuál sería el tipo de cambio para los 2 años F_0?

Caso práctico:

Ahora supongamos, que el tipo de cambio desde 0.6300:

Usted podría:

1. Pedir prestados 1000 AUD al 5% por año durante dos años, convertir 620 USD e invertirlos al 7% con interés compuesto continuo.
2. Entrar en un contrato plazo para la compra de 1,105. 17 AUD que convertidos a dólares ¿Cuál es el importe de la conversión de 1105.17 AUD a dólares?

R = 696.26 USD (***1,105.17 x 0. 63 = 696.26***)

¿A cuánto ascenderán los 620 dólares invertidos al 7%?

Los 620 USD que se invierten al 7% crecerán hasta $620e^{(0.07 \times 2)} = 713.17$ USD en dos años.

De los 713.17, los 696. 26 son para la compra de 1105. 17 AUD bajo los términos del contrato a plazo. Esto es lo suficiente para retornar el principal de 1,000 AUD más intereses, que se pidieron prestados ($1000e^{0.05 \times 2} = 1105.\ 17$)

¿Cuál es el importe del beneficio o pérdida libre de riesgo?

Por lo anterior, la estrategia provoca un beneficio libre de riesgo de 16. 91 USD (***713.17 - 696.26= 16.91***).

Caso práctico:

Ahora suponga usted que el tipo de cambio a plazo para dos años no fuera del 0.6453 sino de 0.6600.

Usted puede:

1. Tomar prestados 1,000 USD al 7% anual por dos años, equivalentes a 1,612.90 AUD (1000 / 0.6200), en invertir los AUD al 5%.
2. Negociar un contrato plazo para la venta de USD tomando como base los 1,782.53 AUD ¿A cuanto equivalen en dólares los AUD?

R=1782. 53 AUD equivalentes a 1,176.47 USD (***1,782. 53 x 0. 66 = 1,176.47***)

¿A cuanto ascienden los 1,612.90 AUD invertidos al 5% a 2 años?

¿Si 1,612.90 AUD que se invierten al 5% a cuanto ascenderán?

El contrato plazo tiene el efecto de convertir esta cantidad en 1,176. 47 USD.

¿Cuál es el importe de invertir 1,000 al 7% anual por 2 años?

La cantidad que se necesita para devolver los préstamos en USD por un importe en USD de $1{,}000e^{0.07 \times 2}$ = 1150. 27 USD.

¿Cuál es la utilidad o pérdida libre de riesgo en dólares por seguir esta estrategia?

Esta estrategia provocará una utilidad libre de riesgo igual a 26.20 USD

(1,176.47 – 1,150.27 = 26.20 USD).

CONTRATOS DE FUTUROS SOBRE MERCANCÍAS

Ahora veremos cómo se manejan los contratos de futuros sobre productos o mercancías.

Pensemos en el impacto sobre el precio de futuros por el almacenamiento de las mercancías ya que son activos de inversión tan valiosos como el oro o la plata.

Sin considerar los costos de almacenamiento, la fórmula sería:

$$F_0 = S_0 e^{r-T}$$

Los costos de almacenamiento bien pueden ser considerados como ingresos negativos.

Si "U" es el valor presente (*Present Value*) de los costos de almacenamiento de inventarios previstos durante la vida del contrato de futuros. La fórmula a utilizar sería:

$$F_0 = (S_0 + U)\, e^{rT}$$

Caso práctico:

Suponga que se lleva a cabo un contrato sobre oro a un año. El costo de almacenamiento anual del oro es de dos dólares por onza. El precio al contado desde 450 dólares y el tipo de interés libre de riesgo es el 7% anual para todos los vencimientos.

Lo anterior equivale a decir que:

r	=			0.07
S_0	=			450
T	=			1
U	=	$2e^{-0\text{-}07 \times 1}$	=	1.865

Sustituyendo valores:

$$F_0 = (450 + 1{,}865)\, e^{0.07 \times 1} = 484.63$$

Si F_0 > 484.63 usted puede comprar oro y vender a corto contratos de futuros sobredicho oro a un daño para terminar con beneficios. Por otra parte, si F_0 > 484.63, un inversor que ya tiene oro pudiera mejorar sus ganancias vendiendo dicho oro y comprando contratos de futuros en ese metal.

Ahora consideremos que si los costos de almacenamiento de productos son en todo momento proporcionales al precio de ese producto, podrían ser considerados como una tasa de rendimiento negativa, por tanto, la fórmula sería:

$$F_0 = S_0\, e^{(r + u)\, T}$$

Donde "u" es la proporción sobre el precio al contado de los costos de almacenamiento anual.

Mercancías para Consumo:

Aquellas mercancías que sean activos de consumo y no precisamente de inversión, tienen un tratamiento diferente.

Si en lugar de la ecuación:

$$F_0 = (S_0 + U)\, e^{r\,T}$$

Utilizamos:

$$F_0 > (S_0 + U)\, e^{r\,T}$$

Para obtener ventajas financieras, usted podría utilizar la siguiente estrategia:

1. Pedir prestado la cantidad S_0 + U al tipo de interés libre de riesgo para comprar un artículo y al mismo tiempo pagar los costos de almacenamiento.
2. Tomar una posición corta en un contrato a plazo.

Caso práctico:

Caso de una oportunidad de arbitraje de mercado del oro cuando el precio del futuro del mismo es sumamente alto.

El precio del futuro del oro a un año es de 500 dólares por onza. El precio al contado desde 450 dólares por onza y el tipo de interés libre de riesgo es el 7% anual. Los costos de almacenamiento anual son de dos dólares por onza que son pagados al vencimiento.

El precio del futuro del oro es demasiado alto, por lo tanto un arbitrajista puede:

1. Pedir prestados 45,000 dólares al tipo interés libre de riesgo para poder comprar 100 onzas de oro.
2. Vender a corto un contrato de futuros con entrega a un año.

Al final del año se reciben 50,000 dólares por el oro bajó los términos del contrato de futuros, 48,263 dólares se utilizarán para pagar tanto el capital como los intereses del préstamo y 200 dólares para pagar el almacenamiento.

¿Cuál será el beneficio neto?

Esta estrategia provocará una utilidad libre de riesgo igual a 26.20 USD

(1,176.47 – 1,150.27 = 26.20 USD).

Caso de una oportunidad de arbitraje de mercado del oro cuando el precio del futuro del mismo es demasiado bajo.

El precio del futuro del oro a un año desde 470 dólares por onza. El precio de contado desde 450 dólares por onza y el tipo de interés libre de riesgo del 7%

anual. Los costos de almacenamiento del oro son de dos dólares por onza por año pagaderos al vencimiento.

Debido que es el control oro es bajo. Consideremos a un inversionista que tiene 100 onzas de oro con el propósito de invertir. Por lo tanto tienen las siguientes alternativas:

1. Vender el oro por 45,000 dólares
2. Tomar una posición corta en contrato de futuros con entrega en un año.

Los 45,000 dólares invertidos al tipo interés libre de riesgo durante un año se convierten en 48,263 dólares. Al final del año bajo las condiciones del contrato de futuros, se comprar 100 onzas de oro por 47,000 dólares. El inversor, por lo tanto cierra con 100 onzas de oro adicionales.

48,263 - 47,000 = 1,263 en efectivo.

Si el inversor hubiera mantenido el oro a lo largo del año, terminará dicho año con 100 onzas de oro menos 200 dólares que habrá pagado por el almacenamiento. Siendo esta situación ¿Cuál sería la estrategia de futuros para mejorar la posición del inversor?

1,263 + 200 = 1,463

Casos prácticos de repaso relativos a la determinación de precios a plazo y de los futuros.

1. Banamex ofrece un tipo interés del 14% anual compuesto trimestralmente. Cuál es el tipo equivalente:
   a) Compuesto continuo
   b) Compuesto anual

a) $$4 \ln\left(1 + \frac{0.14}{4}\right) = 0.1376 \text{ ó } 13.76\% \text{ anual}$$

Int. Compuesto continuo trimestral

1	4ln(1+(0.14/4))	1.035

	0.14	ln(1.035)	0.034401427
trimestres	4		0.137605707
exponente	4		

b) $$\left(1 + \frac{0.14}{4}\right)^{4} - 1 = 0.1475 \text{ ó } 14.75\% \text{ anual}$$

Int. Compuesto anual

	1		1.035
	0.14		1.147523001
	4		-1.000000000
exponente	4		0.147523001
		Por 100 para convertirlo a %	14.75230006

2. Suponga que se firmó un contrato plazo seis meses sobre una acción que no paga dividendos cuando el precio de la acción es de tan sólo 30 dólares y el tipo de interés compuesto continuo libre de riesgo es de 12% anual. ¿Cuál sería el precio a plazo?

$$30e^{(0.12 \times 0.05)} = 31.\ 86 \text{ dólares}$$

Caso Práctico:
Una Institución Financiera le ofrece a usted pagarle un interés anual compuesto del 14% con cortes semestrales
a un plazo acordado de 2 años.
En función a lo anterior, se le pide a usted calcular lo siguiente:
a) El interés compuesto contínuo
b) El interés compuesto anual

Solución:
a) El interés compuesto contínuo

	Años	Se multiplica por los semestres por año	Igual al número de períodos
Si el plazo acordado es de 2 años, entonces se convierte a períodos	2	2	4

La fórmula a aplicar en estos casos es: **Rc = m (x) ln [1+(Rm/m)]**

Donde:

m = número de períodos calculado, que en nuestro caso es: 4

ln = "Logaritmo natural" de un número y representa la función inversa del "exponente"

Rm = "Rate" significa la "tasa o interés contínuo" que es del: 14% con cortes semestrales

Si sustituimos valores en la fórmula **Rc = m (x) ln [1+(Rm/m)]**

Rc= 4 (x) ln [1+(0.14/4)]
Rc= 4 (x) ln [1+0.035]
1+0.035= 1.035
Rc= 4 (x) ln [1.035]
ln de 1.035= 0.034401427
Rc= 4 (x) 0.034401427
Rc= 0.137605707

Respuesta RCx100= 13.76057069

b) El interés compuesto anual

La fórmula a aplicar en estos casos es: $R = [1+(Rm/m)]^{m}-1$

Si sustituimos valores en la fórmula

$R= [1+(0.14/4)]^{4} - 1$

$R= 1.035^{4} -1$
R= 1.147523001 -1
R-1= 0.147523001

Respuesta R x 100= 14.75230006

3. Un índice sobre acciones actualmente está en 350 dólares. El tipo interés libre de riesgo compuesto continuo es del 8% anual y la tasa de dividendo del índice es del 4% anual. ¿Cuál debería ser el precio del futuro a un contrato de tan sólo cuatro meses?

4/12=0.3333

$$350e^{(0.08-0.04)\times 0.3333} = 354.70 \text{ dólares}$$

0.08-0.04 x 0.33333		0.0133332
		4
		12
		0.333333333
Valor fijo		**2.71828**
e a la 0.0133332		1.013422474
	350	354.697866

Una institución financiera pretende obtener un 8% anual compuesto continuo por un préstamo que le otorgará a usted, considerando que el interés deberá ser pagado trimestralmente.

a) ¿Cuál es el interés compuesto trimestral? y,

b) Si en este caso le prestaran a usted 1,000 dólares ¿Cuánto debería pagar usted al Banco trimestralmente?

Repaso sobre los temas vistos en clase

Como hemos comentado, el tipo de interés que utilizaremos será el compuesto continuo, excepto se indique lo contrario. La razón de ésto es que se utiliza frecuentemente en la valoración de opciones y otros activos derivados complejos.

Suponga que R (*Rate*), es un tipo de interés continuo y que ***Rm*** es el tipo nominal equivalente compuesto ***m*** veces por año, de donde se deducen las siguientes ecuaciones que pueden ser utilizadas para convertir el interés nominal, cuando la frecuencia de composición es de m veces al año, a un interés compuesto continuo y viceversa. La función 1n es la función de un logaritmo natural y se localiza en las calculadoras. Se define como:

y= 1n x, entonces $x = e^{y}$

$$R_c = m \ln \left(1 + \frac{R_m}{m}\right)$$

Ecuación 1

$$R_m = m \left(e^{R_c/m} - 1\right)$$

Ecuación 2

Considere un tipo de interés del 10% anual con intereses semestrales, utilizando la ecuación 1 con m=2 (2=semestres en un año) y Rm=0.1 (que es el tanto por uno del 10%), ¿**Cuál es el tipo compuesto continuo equivalente**?

$$2 \ln \left(1 + \frac{0.1}{2}\right) = 0.09758 \text{ ó } 9.758\% \text{ anual}$$

Suponga usted que un Banco pretende conseguir un 8% anual compuesto continuo por un préstamo que le otorgará, considerando que el interés deberá ser pagado trimestralmente. Utilice la Ecuación 2 con m=4 (4 trimestres) y Re=0.08 (8%). ¿**Cuál es el interés compuesto trimestral**?

$$4(e^{0.08/4} - 1) = 0.0808 \text{ ó } 8.08\% \text{ anual}$$

Si en este caso le prestaran a usted 1,000 dólares ¿Cuánto debería pagar al Banco trimestralmente?

1000	8.08%	80.800000
1,080.8		

80.80 de intereses anuales **/** 4 trimestres = 20.20 dólares cada trimestre

Precios a plazo para Activos de Inversión

Si consideramos una posición larga en un contrato a plazo para comprar una acción que no pagará dividendos e los 3 meses que durará el contrato. El precio de la acción es de 40 dólares y el tipo de intereses libre de riesgo a 3 meses es del 5% anual. Si establecemos 2 estrategias extremas de arbitraje.

1. Pedir prestados 40 dólares para comprar una acción al contado.
2. Firmar un contrato para vender una acción en 3 meses.

El precio a plazo es de 43 dólares. Un arbitrajista podría pedir prestado 40 dólares al tipo de interés libre de riesgo del 5% anual, comprar una acción y tomar una posición corta e un contrato a plazo para vender una acción en 3 meses. Al final de esos 3 meses, el arbitrajista entregará la acción y recibirá 43 dólares. ¿Cuál sería la cantidad de dinero necesaria para saldar el préstamo:

$$40e^{0.05 \times 3/12} = 40.50$$

El arbitrajista, siguiendo la estrategia anterior, cierra con un beneficio de 43.00-40.50= 2.50 al final del período de 3 meses.

Ahora bien, si el precio de la acción no fuera de 43 dólares sino de 39 dólares. Un arbitrajista puede vender a corto una acción, invertir los ingresos de la venta a corte al 5% anual durante 3 meses y aceptar una posición larga en un contrato a plazo de 3 meses. ¿Cuáles sería los ingresos de la venta a corto?

$$40e^{0.05 \times 3/12} = 40.50$$

Al final de los 3 meses, el arbitrajista pagará 39 dólares, aceptará la entrega de la acción bajo los términos del contrato a plazo y lo utilizará para cerrar la posición corta. Por lo tanto su utilidad será:

$$40.50 – 39.00= 1.50$$

Para generalizar este ejemplo, si un contrato a plazo sobre un activo con precio S_0 que no da ninguna utilidad adicional (como dividendo, cupón, etc.) T sería el tiempo hasta la fecha de vencimiento, siendo r el interés libre de riesgo y F_0 sería el precio a plazo. Por tanto la relación entre S_0 y F_0 sería:

$$F_0 = S_0 e^{r\,t}$$

Si $F_0 > S_0 e^{rt}$, los arbitrajistas pueden comprar el activo y tomar posiciones cortas a plazo sobre el mismo.

Si $F_0 < S_0 e^{rt}$, los arbitrajistas pueden vender el activo a corto y comprar contratos a plazo sobre él.

En nuestro ejemplo S_0 = 40, r=0.05 y **T** = 0.25 con lo que la ecuación daría:

$$F_0 = 40e^{0.05 \times 3/12} = 40.50$$

Lo que concuerda con los cálculos hechos

Ejemplo:

Un contrato a plazo de 4 meses para comprar un bono cupón cero que vence dentro de un año a partir de hoy. El precio actual del bono es de 930 dólares. (Como al bono le faltarán 8 meses para el vencimiento en la fecha de vencimiento del contrato a plazo, podemos considerar éste como un contrato a plazo para la compra de un bono cupón cero de 8 meses). Supondremos que el tipo de interés libre de riesgos de 4 meses (compuesto continuo) es el 6% anual. Como los bonos al descuento no proporcionan ningún interés o renta, puede utilizarse la ecuación vista:

T= 0.333, **r**=0.06 y **S**=930. El precio a plazo, F_0 se da por:

$F_0 = 930e^{(0.06 \times 4/12)} = \mathbf{948.79}$ **que corresponde al precio de entrega de un contrato negociado el día de hoy.**

Si no fueran posibles las ventas a corto ¿qué sucedería?

Desafortunadamente no son posibles las ventas en corto en ciertos activos de inversión.

Aunque esto sea así, no afecta la operación. Para efectos de cálculo diferencial, deberá derivarse la ecuación.

$$F_0 = S_0 e^{rt}$$

En otras palabras, no necesitamos la posibilidad de vender a corto el activo. Todo lo que se requiere estrella un número significativo de gente que mantenga el activo sólo para inversión (y por definición esto siempre es cierto para un activo de inversión).

Si el precio plazo es muy bajo, encontrarán atractivo vender el activo y tomar una posición larga en un contrato plazo.

En el caso de que un activo subyacente fuera oro y que no hubieran gastos adicionales, si

$F_0 = S_0 e^{rT}$ **un inversor puede adoptar la siguiente estrategia:**

1. **Tomar prestados S_0 dólares a un tipo de interés r para T años.**
2. **Comprar una onza oro.**
3. **Tomar una posición corta sobre una onza oro**

En el momento T una onza de oro se vende por F_0.

La cantidad $F_0 = S_0 e^{rT}$ **se requiere para devolver el préstamo en ese momento y el inversor obtiene un beneficio de:**

$$F_0 - S_0 e^{rT}$$

Suponga ahora que $F_0 < S_0 e^{rT}$ y en este caso un inversor propietario de una onza oro puede:

1. Vender el oro por S_0
2. Invertir ese dinero a un tipo de interés r durante un plazo T.
3. Tomar una posición larga en un contrato plazo sobre una onza oro.

En el momento **T** el dinero invertido habrá crecido hasta $S_0 e^{rT}$. El oro se recompra por F0 y el inversor obtiene un beneficio de

$S_0 e^{rT} - F_0$ respecto a la posición que hubiese tenido de haber mantenido el oro.

Al igual que en el ejemplo de las acciones que no pagan dividendo considerado anteriormente, podemos esperar que se ajuste precio a plazo de forma tal que ninguna de las dos oportunidades de arbitraje existiese.

Ejemplo:

El precio a plazo de un bono para un contrato con fecha de entrega en un año es de 930 dólares. El precio contado actual es de 900 dólares. Se esperan pagos de cupones por 40 dólares en seis meses y en un año. Los tipos de interés libre de riesgo a seis meses y a un año son del 9% y 10% respectivamente.

Oportunidad

El precio plazo es demasiado alto y por lo tanto un arbitrajista puede:

1. Pedir prestados 900 dólares para comprar un bono.
2. Tomar una posición corta en un contrato A plazo sobre un bono.

Calcule usted el beneficio de la operación:

El préstamo de 900 dólares se compone de 38. 24 dólares pedidos prestados al 9% anual durante seis meses y 861. 76 dólares que se piden prestados al 10% anual durante un año.

El primer pago de cupón de 40 dólares es lo necesario para reembolsar exactamente el interés del principal sobre los 38. 24 dólares. Al final de año, se recibe el segundo cupón de 40 dólares, se recibe el 930 dólares por el bono bajo los términos del contrato a plazo y se requiere 952. 39 para pagar el principal y los intereses sobre los 861. 77 dólares. Por tanto el beneficio neto será:

40 + 930 - 952. 39 = 17. 61

Ingresos conocidos previamente

Se tratará el tema de un contrato a plazo sobre un valor que proporcionará pagos en efectivo que son predecibles para su poseedor. Por ejemplo, Acciones que pagan Dividendos conocidos y Bonos que pagan Cupones.

- El precio a plazo de un bono para un contrato con fecha de entrega en un año es 905 dólares.
- El precio al contado actual de de 900 dólares.

- Se esperan pagos de cupón de 40 dólares tanto a los 6 meses como al año.
- Los tipos de interés libres de riesgo a 6 meses y a un año son del 9% y 10% respectivamente.
- El precio del futuro es muy bajo y un inversos propietario del bono puede
  a) Vender el bono.
  b) Firmar un contrato a plazo para volver a comprar el bono dentro de un año.
    - De los 900 dólares que obtendría al vender el bono, 32.24 dólares son invertidos durante 6 meses al 9% anual y 861.76 son invertidos a un año al 10% anual.
    - Esta estrategia proporciona un ingreso de 40 dólares a los 6 meses y de 952.39 a un año. Los 40 dólares reemplazan al cupón que se habría recibido por el bono al cabo de un año.
    - Bajo los términos de un contrato a plazo, el bono se vuelve a comprar por 905 dólares.
- ¿Cuál sería la estrategia de vender un bono y después volver a comprarlo versus mantener el bono durante un año?
    - La estrategia de vender un bono y volver a comprarlo es:

$$\boxed{952.39 – 40 – 905\text{-}00 = 7.39}$$

  Lo cual es más rentable que simplemente mantener el bono durante un año.

Un contrato a plazo para la compra de un bono que paga cupones cuyo precio actual es de 900 dólares. Si el contrato de compra vence dentro de un año y el bono vence en 5 años, es decir, es un contrato a plazo de compra de 4 años dentro de un año (por eso son 5 años). Los pagos de cupones son de 40 dólares dentro de 6 meses y después de 12 meses se hará el segundo pago de cupón inmediatamente anterior al vencimiento del contrato a plazo. Se asume de interés libre de riesgo a 6 meses y un año de tipo compuestos continuos son 9% y 10% anual respectivamente.

Primera suposición: Supongamos en primer lugar que el precio a plazo es relativamente *alto* de 930 dólares y un arbitrajista pide prestado 900 para comprar el bono y vender a corto un contrato a plazo. El primer pago del cupón supone un valor actual de

$40e^{-0.09 \times 0.5} = 38.24$ dólares. De los 900 dólares, 38.24 se piden prestados al 9% anual durante 6 meses, con lo cual se pueden devolver con el pago del primer cupón. Los restantes 861.60 dólares se piden prestados al 10% anual durante un año.

La cantidad que se debe al final del año sería de $861.76e^{0.1 \times 1} = 952.39$ dólares. El segundo cupón proporciona 40 dólares y se reciben 930 dólares por el bono bajo los términos del contrato a plazo. El arbitrajista por tanto, conseguiría un beneficio neto de:

$$40 + 930 - 952.39 = 17.61$$

Segunda suposición: Supongamos ahora que el precio a plazo es relativamente *bajo* de 905 dólares. Un inversor que pose al bono puede venderlo y firmar un contrato a plazo.

De los 900 dólares obtenidos al vender el bono, 38.24 dólares se invierten durante 6 meses al 9% anual de manera que se convierta en una cantidad suficiente para igualar el cupón que se habría pagado por el bono.

Los restantes 861.76 dólares se invierten durante 12 meses al 10% anual y se convierten con intereses en **952.39** dólares.

De esta cantidad 40.00 dólares se utilizan para reemplazar el cupón que habríamos recibido por el bono y 905 dólares se pagan bajo términos del contrato plazo para poder devolver el bono a la cartera del inversor. Dicho inversor obtendría el siguiente beneficio:

$$952.39 - 40 - 905 = 7.39$$

En relación con la posición que el inversor habría tenido si se hubiese quedado con el bono.

Con el ejemplo anterior puede llegarse a una generalización:

Si un contrato a plazo sobre un valor que proporciona una renta con u valor actual ***I*** a lo largo de la vida del contrato a plazo.

$F_0 = (S_0 - I\ \$)e^{rT}$

En el ejemplo visto se consideró $S_0 = 900 \quad I = 40e^{-0.9 \times 0.5} + 40e^{-0.10 \times 1} = 74.333$

R= 0.1 y T = 1; por tanto:

$$F0 = (900.00 - 74.433)\ e^{0.1 \times 1} = 912.39$$

Esta fórmula se aplica a cualquier activo que genere un ingreso líquido conocido.

Si $F0 > (S0 - I)^{rT}$, un arbitrajista puede asegurarse un beneficio comprando el activo y tomando un posición corta en u contrato a plazo sobre el activo. Si $F_0 < (S0 - I)e^{rT}$ el arbitrajista puede asegurarse un beneficio vendiendo el activo a corto y tomando una posición larga en un contrato a plazo.

Si las ventas a corto no fuesen posible, los inversote propietarios del activo encontrarían provechoso vender el activo y entrar en una posición larga en contratos a plazo.

Caso Práctico

Un contrato a plazo a diez meses sobre una acción con un precio de 50 dólares. El interés compuesto continuo libre de riesgo es del 8% anual para todos los vencimientos.

Se esperan unos dividendos del 0.75 dólares por acción después de 3, 6 y 9 meses.

El valor actual de los dividendos ***I***, se da por:

$$I = 0.75e^{-0.08 \times 3/12} + 0.75e^{0.08 \times 6/12} + 0.75e^{0.08 \times 9/12} = 2,162$$

$F_0 = (S_0 - I\ \$)^{rT}$ La variable ***T*** es 10 meses.

$$F = (50 - 2,162)\ e^{0.08 \times 10/12} = \$51.14$$

- Si el precio a plazo fuese menor, un arbitrajista vendería a corto la acción y compraría contratos a plazo.
- Si el precio a plazo fuera mayor, debería vender a corto contratos a plazo y compraría la acción al contado.

Rendimiento conocido

El activo subyacente en un contrato a plazo genera un rendimiento conocido (*yield*) en lugar de recibir un ingreso líquido conocido. Esto quiere decir que el ingreso expresado solo como un porcentaje del precio del activo, es conocido. Suponga que espera que un Activo le de a usted un rendimiento del 5% anual. Esto se puede interpretar como que se abona el 5% compuesto del precio del activo una vez al año. También puede interpretarse que el ingreso es del 2.5% semestral.

"q" representa el rendimiento promedio anual de un activo durante la vida de un contrato a plazo.

$$F_0 = S_0 e^{(r-q)T}$$

Caso práctico:

Un contrato a plazo de 6 meses sobre un activo del que se espera un dividendo del 2% en un período de 6 meses. El tipo de interés libre de riesgo compuesto continuo es el 10%. El precio del activo es de 25 dólares. En este caso $S_0 = 25$ $r=0.10$ $T= 0.5$.

El rendimiento es del 4% anual con composición semestral.

Si se aplica la fórmula:

$$R_c = m \, 1n \left(1 + \frac{Rm}{m}\right)^m \qquad \text{Ecuación 1}$$

Si se aplica la ecuación:

$$F_0 = S_0 e^{(r-q)T}$$

El resultado será 3.96% anual con composición continua. Por lo tanto

$$q = 0.0396$$

$$F0 = 25e^{(0.10 - 0.0396) \times 0.5} = 25.77$$

Valoración de contratos a plazo

¿**Cuál es el valor de un contrato a plazo en el momento en que se firma por primera vez**?

Es este caso el valor es cero. Después podrá tener un valor ya sea positivo o bien negativo.

Si suponemos que F_0 es el precio a plazo actual para un contrato que se negoció hace algún tiempo.
La fecha de entrega es en T años y
r es el tipo de interés libre de riesgo anual para T años.
K Es el precio de entrega en el contrato
f Es el valor del día de hoy del contrato a plazo.

La fórmula general aplicable a todos los contratos a plazo, tanto para activos de inversión como para activos de consumo es:

$$f = (F_0 - K)\, e^{-rT}$$

Cuando un contrato a plazo se negocia por primera vez, **K** es igual a F_0 y $f = 0$
Conforme pasa el tiempo, tanto el precio a plazo, F_0 como el valor del contrato f, si cambian.

Si comparamos un contrato de compra a plazo con el precio de entrega F0 con otro contrato a plazo idéntico que tiene un precio de entrega **K**.

La diferencia entre lo dos es solo la cantidad que se pagará por el activo subyacente en el momento **T**.
En el primer contrato esta cantidad es F_0, en el segundo contrato es **K**. Una diferencia de $(F_0 - K)$ en el momento **T** se traduce en un diferencia de $(F0 - K)e^{-rT}$ del día de hoy.

El contrato con un precio de entrega F_0 es, por tanto, menos valioso que el contrato con un precio de entrega **K** en una cantidad de $(F_0 - K)\, e^{r - T}$

El valor del contrato que tiene un precio de entrega de F_0 es por definición "0".

Por lo tanto el valor del contrato con un precio de entrega de **K** es $(F_0 - K)\, e^{-rT}$

El valor de una posición corta en un contrato con precio de entrega K es

$$(K - F_0)\, e^{-rT}$$

Caso práctico:

En el caso de una posición larga en un contrato de compra a plazo sobre una acción que no paga dividendos y que se inició hace algún tiempo. En la actualidad faltan 6 meses para el vencimiento. El tipo de interés libre de riesgo compuesto continuo es del 10% anual, el precio de la acción es de 25 dólares y el precio de entrega es de 24 dólares.

$S_0 = 25 \quad r = 0.10 \quad K = 24$

$$F_0 = S_0 e^{rt}$$

El precio a plazo F_0 es:

$$F_0 = 25e^{(0.10 \text{ X } 0.5)} = \$26.28$$

Si se utiliza la fórmula:

$(K - F_0)\, e^{-rT}$ Esta fórmula muestra que podemos valorar una posición larga en un contrato a plazo sobre un activo suponiendo que el precio del activo al vencimiento del contrato a plazo es igual al precio a plazo F_0.

$$F_0 = (26.28 - 24)\, e^{-0.10 \times 0.05} = \$2.17$$

Una posición larga en un contrato a plazo implica un beneficio bruto en el momento T de F0 – K.

Esto tiene un valor actual de $(F_0 - K)\, e^{-rT}$ que es el valor de f en la ecuación

$$f = (F_0 - K)\, e^{-rT}$$

De manera similar, se puede valorar una posición corta en un contrato a plazo sobre un activo suponiendo que el precio actual a plazo del activo se realiza.

Si se mezclan las fórmulas:

$$(K - F_0)\, e^{-rT}$$

Con la fórmula,

$$f = (F_0 - K)\, e^{-rT}$$

Obtenemos la siguiente fórmula

$$f = S_0 - Ke^{-rT}$$

Si mezclamos la fórmula

$$f = (F_0 - K)\, e^{-rT}$$

Con la fórmula,

$$F_0 = (S_0 - I\ \$)\, e^{rT}$$

Obtenemos la siguiente fórmula

$$f = S_0 - I - K\, e^{-rT}$$

Por último, si se mezcla la ecuación

$$f = (F_0 - K)\, e^{-rT}$$

Con la ecuación

$$F_0 = S_0 e^{(r-q)T}$$

Obtenemos la siguiente fórmula:

$$F = S_0\, e^{-qT} - Ke^{-rT}$$