Continuación: Valor presente y Procesos de Descuento

De forma hipotética, si el Índice de Precios y Cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores (IPC) descendiera por ejemplo dos puntos porcentuales cada semana, el porcentaje acumulado en 4 semanas no sería del 8% (2% x 4 semanas) sino menor, ya que tiene también en este caso la baja en cualquier semana, depende de la habida en la semana que le precede. Supongamos ahora que la inflación acumulada en el trimestre no será la suma de los porcentajes que determinamos, sino mayor por razones similares a las anteriores, por tanto, se daría un crecimiento o decrecimiento sobre el último dato observado.

Las situaciones antes descritas pueden ser la base para el estudio del Interés Compuesto y se presentan generalmente cuando los incrementos o variaciones se dan en porcentajes.

Los incrementos pueden ser constantes durante un lapso dado más o menos largo o bien pueden cambiar de un período a otro. En el primer caso se utilizan las fórmulas y los procedimientos de las progresiones geométricas y en el segundo caso, cuando no son constantes, la variación total se obtiene considerando la variación individual, paso a paso.

VARIACIÓN CONSTANTE

Si la variación en los valores permanece fija, entonces el desarrollo operativo se simplifica como sigue:

Inflación Semestral dada la misma en formato mensual

Ejemplo: Si la inflación mensual promedio durante 6 meses ha sido del 1.2%

¿De cuánto será la inflación acumulada del semestre?

Si suponemos que el primer día del semestre, el precio de un artículo de la canasta básica fue de Co pesos; al final del primer mes, es decir al comenzar el segundo mes, el precio es un 1.2% mayor, es decir, que al final del primer mes el incremento es del 1.2%

$C1=Co+0.012Co$

$C1=Co(1+0.012) = Co(1.012)$

Si al final del segundo mes se incrementa en otro 1.2%

$C2=C1+0.012C1$

$C2=C1(1.012))(1.012)$ porque $C1=Co(1.012)$ ó $C2=Co(1.012)^2$

De igual forma al final del tercer mes se tiene:
$C3=C2+0.012C2$
$C3=C2(1.012)$
$C3=Co(1.012)^2 (1.012)$ ya que $C2=Co(1.012)^2$

Por lo tanto al final del semestre, el precio del artículo es:

$C6=Co(10.12)^6$ ya que el exponente es igual al subíndice C. Esto es igual a

$C6=Co(1+0.0741947873)$ ó $=Co(1.074194873)$

Se expresa como $C6=Co(1+0.0741947873)$ ó como
$C6=Co+0.074194873Co$

Lo anterior significa un incremento del 7.4195% aproximadamente, con respecto al precio original

Por lo tanto, la inflación del semestre es de 7.4191% y no del 7.2% que es el resultado de multiplicar la inflación mensual de 1.2% por 6 meses.

Cuando la variación es constante, el valor de cualquier C se obtiene por la fórmula $a_n=a_1(r)^{n-1}$ **para las progresiones geométricas donde r, la razón es igual a (1+v) y v es la tasa de crecimiento o decrecimiento de la variable, como la inflación.**

VARIACIÓN NO CONSTANTE

¿Cuál será el porcentaje de inflación en el primer cuatrimestre del año, si en los meses de enero, febrero, marzo y abril fue del 1.2%, 0.9%, 1.3% y 1.5% respectivamente?

La solución es similar. Si al iniciar el mes de enero o bien al terminar el mes de diciembre anterior, el costo de un artículo que varía con la inflación es C, al finalizar el mes de enero serpa de un 1.2% mayor, es decir:

$C1=C+0.012C$
$C1=(1+0.012)C$
$C1=(1.012)C$

Es decir, se factoriza "C" y se reduce a:

El 1.2% de C se expresa como (0.012)C

A finales de febrero, el costo crece otro 0.9%, por lo tanto:

$C2=C1+0.009C$, 0.009 representa el 0.9%
$C2=(1.009)C1$
$C2=(1.009)(1.012C)$ ya que $C1=1.012C$

Al terminar el mes de marzo, hay otro incremento del 1.3% donde

$C3=C2+0.013C2$
$C3=(1.013)C2$
$C3=(1.013)(1.009)(1.012)C$, Se reemplaza a C2

Al final del cuatrimestre el precio del artículo es un 1.5% mayor por ello:

$C4=C3+0.015C3$
$C4=(1.015)C3$
$C4=(1.015)(1.013)(1.009)(1.012)c$
$C4=(1.04989814)C$

Que se puede expresar como sigue:

$C4=(1+0.04989814)C$

Lo cual significa un incremento total del 4.989814% y por supuesto esta cifra es mayor que el 4.90% que es la suma de los 4 porcentajes.

Ejemplo:
Porcentajes del incremento en Ventas

a) ¿En qué porcentaje han crecido las ventas de una exportadora de artesanías en sus primeros 6 años, si del primero al segundo año crecieron 3%, del segundo al tercer año un 3.7% y así sucesivamente 5.2%, 7.1% y 10.5%?
b) ¿De cuánto serán sus ventas en el sexto año sin el primero exportó 750,300 dólares con un tipo de cambio proyectado de 11.60 por cada dólar?

Solución:

a) **Supongamos que las ventas del primer año fueron V1, en el segundo fueron 3% mayores, por tanto:**

V2=V1+0.03V1
V2=(1.03)V1

En el tercero son un 3.7% mayores, por lo que

V3=(1.037)V2
V3=(1.037)(1.03)V1 porque V2=1.03V1

En el cuarto año y los subsiguientes, las ventas son:

V4=(1.052)(1.037)(1.03V1)
V5=(1.071)(1.052)(1.037)(1.03V1) y
V6=(1.105)(1.071)(1.052)(1.037)(1.03V1)
V6=(1.329791246)V1
ó V6=(1+0.329791246)V1

que representan un incremento total del 32.98% aproximadamente en los 6 años, incremento que es mayor al 29.5% que resultan de sumar los 5 porcentajes.

b) **Las ventas en el sexto año, si en el primero fueron de US 750,300 con los incrementos dados son:**
V6=(1.329791246)(750300)
V6=US 997,742.37 por el tipo de cambio digamos de 11.60 **para obtener su valor en pesos** =$11,573,811.49

1. La producción de automóviles en 1999 fue de 175,000 unidades ¿De cuánto será en el año 2008 si ésta crece un 8% anual en los primeros dos años, un 10.5% en los siguientes tres años y posteriormente un 7.6% anual? R= 369,166

2. El PIB creció 3.6% en 1991, 2.8% en 1992, 0.6% en 1993 y 3.5% puntos porcentuales en 1994. En 1995 se redujo 6.9 puntos porcentuales para después crecer 5.1 puntos en 1996, 7 puntos en 1997 y 4.5 puntos en 1998 ¿De cuántos puntos porcentuales fue el incremento acumulado del PIB desde 1991 hasta 1998? R=21.323%

RECAPITULACIÓN DEL CONCEPTO DEL INTERÉS COMPUESTO

En el interés compuesto, los intereses que se devengan en un período se agregan o suman al Capital C y desde el segundo período generan sus propios intereses. Puede suceder que la tasa sea variable, en cuyo caos se procede como en los ejemplos ya vistos, o bien que sea constante y entonces deberá seguirse el procedimiento siguiente:

Suponga Ud. que se depositan $1,000 en una cuenta bancaria que paga el 36% de interés anual, compuesto por meses ¿Cuál será el monto acumulado al final de año y medio?

Decir que el interés es compuesto por meses significa que cada mes los intereses que se generan se capitalizan es decir, se suman al Capital.

Para los intereses del mes, el capital se multiplica por la tasa mensual 36%/12=0.03 y por tanto, al término del primer mes el monto del Capital C1 es:

$M1=1,000+0.03(1000)$ $M1=1,000(1+0.03) = C1(1.03)$

$M1=1,000(1.03)$ o bien $M1=1,030$

Al comenzar el segundo período mensual, el capital es de 1,030 y el interés mensual es del 3%, por lo que el Monto M a final de ese mes es:

M2=1,030 + 0.03 (1,030)   M2=1,030(1.03)   M2=1,000(1.030)(1.03) porque 1030=1000(1.03)

$a(a)=a^2$

$M_2=1{,}000(1.03)^2$ $M_2=1{,}060.90$

Al final del tercer mes, el monto es:

$M_3=1{,}060.90\ (1.03)$

$M_3=1{,}000(1.03)^2\ (1.03)$ $1060.90=1000(1.03)^2$

$M_3=1{,}000(1.03)^3$ ya que $a^m\ a^n = a^{m+n}$

Por lo tanto cada uno de estos montos se pueden expresar como el producto de los 1000 originales y una potencia de n de 1.03 que es igual al mes que concluye. El monto acumulado en año y medio, al final de 18 meses es por tanto:

$M_3=1{,}000(1.03)^{18}$ o bien $M_{18}=C1(1.03)^{18}$ $M_{18}=1000(1.702433061)$ $M_{18}=\$1{,}702.43$

Para efectos de comparación, debe notarse que si la inversión se hace con interés simple, el monto al final es menor ya que:

$M=1000(1+18(0.03))$ $M=C(1+ni)$
$M=1000(1.54)$ ó $M=\$1{,}540$

Del mismo modo es cierto que si ahora se capitalizaran los intereses en forma quincenal, el monto se incrementaría, ya que la tasa por quincena será de 0.36/24=0.015 y el monto después de 36 quincenas (año y medio sería:

$M_{36}=1{,}000(1+0.015)^{36}$ $M_{36}=1{,}000(1.709139538)$ $M_{36}=\$1709.14$

Por lo anterior, se confirma que si se reduce el tiempo en que los intereses se capitalizan, el monto aumento, es decir, resulta más productivo pues los intereses producen más intereses más rápido y con mayor frecuencia.

"El tiempo entre dos fechas sucesivas en las que los intereses se agregan al capital se llama PERÍODO DE CAPITALIZACIÓN y el número de veces por año en que los intereses se capitalizan se le llama FRECUENCIA DE CONVERSIÓN y se conoce como P"

A la Frecuencia de Conversión se le conoce en el medio financiero como Frecuencia de Capitalización de Intereses.

Una afirmación es que si el período de capitalización en mensual, entonces las siguientes expresiones son equivalentes: "el interés es compuesto por meses", "capitalizable por meses" "convertible mensualmente" o "interés nominal mensual". En estas condiciones el valor de "p" es doce.

Los valores más usuales para la frecuencia de la conversión p, son:

P=1	Para períodos anuales
P=2	Si los períodos son semestrales
P=3	Para los períodos cuatrimestrales
P=4	Para los períodos trimestrales
P=6	Cuando son períodos bimestrales
P=12	Para períodos de un mes
P=13	Si los períodos son de 28 días y
P=24,	52 y 360 ó 365 para períodos quincenales, semanales y diarios respectivamente.

Los períodos de capitalización pueden ser tan pequeños como se desee, llegando a tasas de con capitalización instantánea y se comprueba algebraicamente como:

$M=Ce^{in}$ donde **e**=2.71828…; **i** es la tasa convertible instantánea y **n** es el tiempo en años

Si p es la frecuencia de conversión, entonces la tasa por período es i/p, por lo que la fórmula general para el monto con interés compuesto es la del siguiente teorema.

El monto acumulado M de un capital C al final de np períodos es $M=C(1+i/p)^{np}$
Donde **n**=plazo en años **np**= es el número de períodos **e**
i=tasa de interés anual capitalizable en p períodos por año

Esta ecuación es conocida como la fórmula del interés compuesto.

Ejemplo ¿Qué capital debe invertirse ahora al 32.7% capitalizable por bimestres para tener 40,000 en 10 meses? ¿A cuánto ascienden los intereses?

El plazo n debe ser calculado en años, por lo que para expresar 10 meses en años se divide entre 12 meses. n=10/12. La frecuencia de la conversión o capitalización de intereses es p=6, por que son 6 bimestre que tiene un año, entonces, np=(10/12)=5 bimestres

El monto M=40,000, la tasa de interés es i=0.327 o 32.7% anual, capitalizable por semestres, y la incógnita es C que se despeja de la igualdad que resultó de sustituir estos valores en la ecuación del teorema ya apuntado.

$40000=C(1+0327/6)^5 \quad 40000=C(1.0545)^5 \quad 40000=C(1.303865879)$

$C=40000/1.303865879$ de donde $C=\$30,678$

Los intereses son la diferencia entre el M y C I = (40,000) – (30,678)

Por tanto, I = 9,322

Con objeto de que refuerce lo comentado anteriormente, a continuación se presentan algunos ejercicios:

¿Cuál es el valor comercial de un pagaré con VN de US 750, si se descuenta con el 33.5% simple anual 3 meses antes de su vencimiento?

		R=	US 687.19
D=Mnd	Valor Original		750.00
M= 750	D=(750)(0.335)(0.25)	menos:	62.8125
d=0.335	Valor Comercial después del Descuento		687.19
t=3/12=0.25			

¿ En cuánto se negocia el 15 de marzo un documento con VN de $350,000 con vencimiento al 15 de agosto y descuento del 37% simple anual?

			R=296,041.67
		Valor Nominal	350,000.00
D=Mnd	D=(350000)(0.37)(0.4166666666)		53958.33332
M= 350,000			296,041.67
d=0.37			
t=5/12=0.41666666666			

¿Cuál es el valor nominal de un documento que 5 meses antes de su vencimiento se negocia en 25,000 al 32.5% de dcto. simple anual?

D=Cdt/1-dt=(25000)(0.325)(5/12)/1-((0.325)(5/12))			R=28,915.66
M=25000	(25000)(0.4166666666)(0.325)		3915.662651
n=5/12=0.4166666666			
		Valor Nominal Original	25,000.00
			3,915.66
			28,915.66

¿Cuántos días antes del vencimiento se comercializa un pagaré en 4,750, si su valor nominal es de 5,200 y el descuento es del 26.4% simple anual?

		R=118 días
D=M-C = 450		
D=Mtn		0.022846154
M= 5,200	D=5200-4750= 450 450=(5200)(0.264)(t)	
C= 4,750	t=450/5200*0.264 = 450/1372.80	0.327797203
d = 0.264	Para convertirlo a días se multiplica por 360	118.006993
n=X		

Obtenga la tasa de descuento simple anual de un documento cuyo VN es de 2,400 y se vende en 2,240 tres meses antes de su vencimiento

			R=26.67%
M= 2400	Cnt= 2400x025*d		
C= 2240	Mt=2400*0.25=600		
t= 3/12 = 0.25	D=2400-2240= 160		
D=X D=Mdt	160=600d d=160/600		0.266666667
		o bien	26.67%

Una empresa descuenta un documento y recibe 8,700. La tasa de descuento fue del 21.5% simple anual y el VN fue de 10,000 ¿Cuánto faltaba para su vencimiento?

		R=218 días
C=M(1-nt)	C=10000(1-n0.215)= 8700=10000(1-n0.215)	
	8700/10000-1=-n(0.215) = 0.13=-n0.215	
	n=0.13/0.215=0.6046512 x 360=217.67 días	

Monto que se acumula al invertir un capital

Planteamiento del Problema:

Obtenga el Monto que se acumula en dos años si un Capital de $65,000 se invierte al 40% integrado por semestres:

Solución

El capital es C=65,000, la tasa anual es i=0.4 la frecuencia de conversión es de p=2, ya que son dos semestres al año, n=2 desde que el Capital se acumula dos años, el número de períodos en el plazo es np=4 (4 semestres), entonces el monto según el teorema 4.1 es:

$M=65,000(1+0.40/2)$, ya que $M=C(1+i/p)^{np}$

$M=65,000(1+0.40/2)^{4}$

$M=65,000(2.0736)$

$M=\$134,784$

Ejemplo sobre la **Tasa de Interés para Duplicar un Capital.**

Planteamiento del Problema:

¿Con qué tasa de interés anual capitalizable por bimestres se duplica un capital en 3 años?

Solución

Si el Capital **C** se duplica en 3 años, entonces el monto es **M**=2C, el plazo es n=3, la frecuencia de conversión es p=6, que son el número de bimestres por año y el número de períodos bimestrales en el plazo es **np** = 3 (6)=18

$2C=C(1+i/6)^{18}$ $\qquad M=C(1+i/p)^{np}$

$2=(1+i/6)^{18}$ $\qquad$ Como C está en ambos lados de la ecuación, se elimina:

$\sqrt[18]{2} = 1+i/6$ ya que $\sqrt[n]{a^n} = a$

$1.039259226=1+i/6$

Se le resta 1 en ambos lados de la ecuación y después se multiplica por 6

$(0.039259226)6 = i$ o bien $i=0.235555356$

Lo anterior significa que para duplicar un capital en tres años deben invertirse aproximadamente al **23.56% anual capitalizable por bimestres**.

Ejemplo sobre el Plazo en inversión de un capital

Planteamiento del Problema:

¿Qué día deberá invertir usted la cantidad $10,000 para disponer de $11,538 el 11 de mayo? Suponga que la inversión genera intereses del 39% compuesto por semanas

Solución

La incógnita es x=np, el plazo se proporciona en semanas, la frecuencia de conversión es p=52, ya que son precisamente 52 semanas que componen a un año, el Capital C=10,000 y el monto del capital es M=11,538 y se sustituyen valores en la ecuación:

$$M=C(1+i/p)^{np}$$

$$11{,}538=10{,}000(1+0.39/52)^{x}$$

$$11{,}538/10{,}000=(1.0075)^{x}$$

$$1.1538=(1.0075)^{x} \text{ o bien } (1.0075)^{x} = 1.1538$$

En este caso se toma el logaritmo natura Ln en ambos lados, ya que si dos números positivos son iguales, sus logaritmos son iguales.

$$\text{Ln }(1.0075)^{x} = \text{Ln}(1.1538)$$

$$(X)\text{Ln}(1.0075)= \text{Ln}(1.1538) \qquad \text{Log}_a (M)^{n} = (n) \text{Log}_a(M)$$

$$X=\text{Ln}(1.1538)/\text{Ln}(1.0075)$$

$$X=0.143060843/0.007472015$$

$$\text{ó} \qquad X=19.146220038$$

Este resultado puede ser redondeado a 19 semanas y con eso el monto será un poco menos de los 11,538. Pero debemos convertirlos a días multiplicándolo por 7 días, o sea, 19.146220038 (7) = 134.023547 o sean 134 días y por lo tanto aplicando una tabla específica o bien calculándolo manualmente se determina que será el 28 de diciembre del año inmediato anterior.

Con objeto de reforzar lo visto, desarrolle usted los siguientes ejercicios:

1) ¿Qué capital debe invertirse en una cuenta que paga el 33.6% anual capitalizable por meses para disponer de 13,000 en 7 meses?

Respuesta= 10,714.98 (Excel VA((0.336/12),7,,13000)*-1= **$10,714.98**

2) ¿Cuánto se acumula en una cuenta de inversión que reditúa el 18.6% anual capitalizable por bimestres en un plazo de 2 años, si se invierten $35,000?

Respuesta=**50,486.12**

3) ¿En cuánto tiempo se liquidará un crédito de $175,000 con intereses del 24.96% compuesto por quincenas y un pago final de $230,000?

Respuesta = **26 quincenas**