Las Matemáticas Financieras son una herramienta muy útil para los negocios entre otras aplicaciones. Muchas veces con práctica y experiencia no siempre se resuelven acertadamente los problemas en un primer intento, y la peor actitud que puede tomarse como sería abandonar el interés, la inquietud y el entusiasmo por aprender los temas que desarrollaremos a través de diferentes sesiones.

Las matemáticas financieras constituyen una de las áreas más útiles e interesantes de la matemática aplicada, principalmente en tiempos modernos, en los que todo mundo aspira a lograr el máximo beneficio como comprador, y los más atractivos rendimientos como inversionistas.

La realidad financiera y comercial de nuestros tiempos, demanda cada vez más un mayor número de profesionistas y personas capacitadas para dar asesoría apropiada a quienes se ven con la necesidad de conseguir dinero prestado, en efectivo, en bienes o servicios, y a los que disponen de un cierto capital para prestarlo, es decir, para invertirlo y ponerlo a generar interés en ciertos beneficios a estos profesionistas, contadores, actuarios, economistas, abogados, mercadólogos, ingenieros en todas sus especialidades y hombres de negocios, donde se podrán capitalizar los conocimientos vertidos en las matemáticas financieras. La CONDUSEF (*Comisión Nacional para la Protección y Defensa de los Usuarios de Servicios Financieros***) amplía sus funciones para que los inversionistas evalúen a las Instituciones Financieras y ya no se obligará a los usuarios ("ventas atadas") a contratar forzosamente ciertas compañías de seguros u otras instituciones financieras.**

El estudio y la aplicación de las Matemáticas a las Finanzas, se reduce algo tan simple, como aprender a utilizar acertadamente las herramientas y metodología para trasladar en

el tiempo y de manera simbólica, los capitales que intervienen en cualquier operación de carácter financiero y comercial.

Considerando que los motivadores para quien estudia Matemáticas, en cualquiera de sus niveles y especialidades, consiste en saber que, "lo que se hace está bien hecho", con una buena cantidad de casos prácticos que se van a desarrollar en el curso de la asignatura, todo ello, con el propósito de comprobar los resultados y explorar otras alternativas de solución.

LOS NÚMEROS.

Hablar de matemáticas aplicadas en cualquiera de las especialidades, es referirse a los números. Es por eso que el punto de partida es una introducción al estudio de las propiedades y de las reglas, entre otras aquellas que se utilizan en operaciones con números.

Diariamente se manejan cantidades que se representan mediante diferentes tipos de números, como son enteros, fraccionarios, positivos, negativos, pares, etc. Todos ellos forman parte de lo que se conoce como el conjunto de los números reales.

Existen otros números que no pertenecen a este conjunto de números reales, y son los llamados imaginarios, pero no tienen nada que ver con las matemáticas aplicadas a los negocios y finanzas. Por ejemplo, dos soluciones a una ecuación:

$$X^2 + 1 = 0; \quad X^2 = -1; \quad X = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

Redondeo de Números.

El criterio más generalizado para redondear los números es:

1. **Si el primer dígito es mayor a cinco, entonces se incrementa en 1. Por ejemplo, 42.53621, con dos decimales quedaría: 42.54.**
2. **Si el primer dígito es menor a cinco, el que se retiene no cambia, por ejemplo: 2.3285543 a cuatro decimales quedaría 2.3285.**
3. **Si el primer dígito es igual a cinco, existen dos opciones:**
   a. **El último dígito que se retiene se incrementa en 1, si a la derecha del cinco hay por lo menos uno que sea mayor que "0"; por ejemplo, 5.085013 se redondea como 5.09 utilizando dos decimales.**
   b. **Si a la derecha del cinco hay sólo cero y el último que se retiene es par, éste no cambia, pero se incrementa en 1 si fuese impar. Por ejemplo, 425.32500 o 425.325 se redondea a 425.32 y 0.8375 se redondea a 0.838, con tres decimales.**

Para tener mayor precisión en el resultado final, se recomienda no hacer el redondeo en las operaciones y resultados parciales, sino hasta en el final totalizado.

Al redondear el número X = 17. 42379035 a siete, cinco, tres y una cifra decimal, queda respectivamente:

X= 17.4237904 con siete decimales.
X= 17.42379 con cinco decimales.
X= 17.424 con tres decimales.
X= 17.4 con un decimal.

Exponentes y radicales.

La enésima potencia del número.

Definición 1: Si "a" es un número real y "n" es un entero positivo, entonces, la enésima potencia de "a" se define como:

$$a^n = \underbrace{a\,(a)\ldots(a)}_{\text{"n" factores}}$$

Donde "a" es la base y "n" es el exponente.

Note que la enésima potencia de un número es una multiplicación sucesiva del mismo número.

Ejemplo:

a) **La segunda potencia de 3 es 9 porque $3^2 = (3)\,(3) = 9$**
b) **La cuarta potencia de (-5) es 625 ya que:**

$$(-5)^4 = (-5)\,(-5)\,(-5)\,(-5) = 625.$$

Hay que recordar que al multiplicar o dividir números con el mismo signo, el resultado siempre será positivo, mientras que se mostrará con signo (-) cuando tengan signo contrario.

La vigésima potencia de 1.0215 es $(1.0215)^{20} = 1.530267728$.

Cuando el exponente es cero o negativo, la definición es la siguiente:

Definición 1.2. Si "a" es diferente de cero, entonces:

Si "a" es diferente de cero, entonces:

$a^0 = 1$ y

Si "n" es negativa, entonces:

$a^{-n} = 1 / a^n$

Estos temas y otros serán ampliados en otras sesiones.

PROBLEMAS DE APLICACIÓN.

César, Jennifer y Juan comparten en sociedad la propiedad de un negocio de Artículos Deportivos y Gym, Spinning, y deciden repartirse las utilidades de acuerdo con su aportación inicial a la sociedad como sigue:

	Importe
César Emmanuel	21,600
Jennifer Edith	27,000
Juan Oswaldo	32,400

Las utilidades de los primeros tres trimestres fueron de 206,550

Calcule usted cuánto le corresponde a cada uno de ellos.

El capital aportado por los tres fue de 81,000

C=21,600+27,000+32,400 = 80,000 = 100%

La aportación de Luis Aarón “X” fue del 26.6% del total, porque si X es el %:

(X/100)(81,000) = 21,600

X=21,600 (100)/81000= 26.$\overline{6}$
La testa “ ” en el 6 significa que se repite indefinidamente.

La participación de Omar Andrés “Y”, tal que:

(Y/100)(81,000) = 27,000

Y = 27,000(100)/81,000 = 3(X/100)(81,000) = $\overline{33.3}$%

La aportación de Mitzi

(Z/100)(81,000) = 32,400

X=32,400 (100)/81000=40.$\overline{0}$%

X = 26.67% (206,550)= 55,080 = Luis Aarón
Y = 33.33% (206,550)= 68,850 = Omar Andrés
Z = 40.00% (206,550)= 82,620 = Mitzi
206,550

Aportación Inicial	%	Dividendo 206.550
21.600	26,67%	55.080
27.000	33,33%	68.850
32.400	40,00%	82.620
81.000	100,00%	206.550

VALUACIÓN DE LOS FLUJOS FUTUROS DE EFECTIVO

Uno los aspectos más importantes de las Finanzas tomando como herramienta a las Matemáticas Financieras, a considerar es:

¿Cuál es el valor presente de un flujo efectivo que se recibirá en una fecha posterior?

La respuesta a esta pregunta dependerá del valor que tendrá el dinero con el transcurso tiempo, tema que será tratado ampliamente.

"*General Motors Acceptance Corporation*" (GMAC), subsidiaria de General Motors, ofreció al público en general, algunos valores financieros para su venta en 500 dólares (unos 6,500 pesos aproximadamente) .

De acuerdo con ésta transacción, GMAC se comprometía a reembolsar, por cada uno de ellos 10,000 dólares (unos 130,000 pesos aproximadamente) el 1° de diciembre del 2043; con la condición de que el inversionista no recibiría nada sino hasta esa fecha específicamente.

Un instrumento de inversión como éste, por el cual se paga una cierta cantidad del día de hoy, a cambio de la promesa de una suma acumulada que se recibirá en una fecha futura, es prácticamente tipo más sencillo posible detectar.

¿Sería un buen negocio entregar 500 dólares a cambio de recibir 10,000 dentro de 30 años?

Si usted es optimista estaría obteniendo 20 dólares por cada dólar de aportación. Quizá le parezca bien, pero desde el punto de vista pesimista usted tendría que esperar 30 años para tener dicha cantidad.

Lo que usted realmente necesita saber es cómo analizar semejante trato, considerando todas sus ventajas y desventajas siendo mi intención proporcionarles las herramientas necesarias para ello.

Uno de los problemas elementales en los que se centra un Director Financiero, es determinar el Valor Presente de una serie de flujos efectivos esperados a futuro.

Si usted quisiera ganar en la "lotería" Mex$110 millones, entonces ¿Significa esto que su serie ganadora tiene un valor de Mex$110 millones?

La respuesta es, por supuesto que no, porque el premio principal sería liquidado a lo largo de 20 años, a una tasa que proporcione 5.5 millones de pesos por año, entonces ¿Cuánto valía entonces el boleto?

La respuesta dependerá del valor del dinero en el tiempo.

Puede afirmarse que la frase de valor de dinero en el tiempo significa que un peso en la cartera hoy vale más que un peso prometido en algún momento futuro. La razón de esto, es que usted podría ganar intereses mientras espera; por lo tanto, un peso del día de hoy crecería algo más de un peso en una fecha posterior.

La relación entre ventajas y desventajas entre el dinero obtenido diario y el que se obtendría en un futuro dependería, entre otras cosas, de la *tasa* que se podría ganar al invertir sus ahorros o excedentes de tesorería.

VALOR FUTURO

El valor futuro se refiere al monto que llegará a una inversión a lo largo del tiempo, a una tasa de interés dada.

En otras palabras, el valor futuro es el valor en efectivo de una inversión en algún momento, precisamente en el futuro.

Suponga que usted invierte 100 dólares en una cuenta de ahorros que pagará el 10% de interés anual. ¿Cuál sería el monto total al cabo de un año?

La respuesta sería: 110 dólares correspondientes a su capital original de 100 dólares más y 10 de intereses.

Por tanto decimos que los 110 dólares son el valor futuro de 100 dólares invertidos a un año al 10%; lo que significa que 100 dólares de hoy valdrán dentro de un año 110 dada la tasa de interés del 10%

$M= C(1+i)^{n}$ $M=100(1+0.10)^{1}$ $M= 100(1.10)$ $M= 110$

En forma recíproca: ¿Cuál es el Valor Presente de un Valor Futuro de 110 con una tasa del 10% anual?

$C=M[1/(1+i)^{n}]$

$VP=110[(1/1+0.10)]^{1}$ $VP=110(0.90909091)$ $VP=100$

En términos generales, se establece que si se invierte a un periodo dado, a una tasa de interés "r" (también se utiliza la literal "i"), la inversión crecerá a [1+r] por cada dólar invertido. En este ejemplo "r" ó "i" es del 10% y la inversión crecerá a 1+10% (1+0.10 = 1.10)) por cada dólar invertido.

Suponga usted que necesitará 1,000 dlls dentro de 2 años, si le garantizan ganar el 7% ¿Cuánto deberá invertir para asegurarse que tendrá los 1,000 cuando los necesite? ó dicho de otra manera ¿Cuál será el Valor Presente de 1,000 dentro de 2 años si la tasa será del 7%?

$VP = C=M[1/(1+i)]^{n}$ $VP= 1000\,([1/(1+0.07)]^{2}$

$= 1000\,(1/1.14499)$ $= 1000\,(0.873370073) = 873.37$

Es decir, necesito invertir hoy 837.37 dlls para obtener dentro de 2 años 1,000 a una tasa anual del 7%

Si usted desea calcular directamente esta cifra utilice la fórmula del VA, donde tasa=0.07 Número de Períodos= 2 VF=1,000 = 873.4387283

Pensemos que a usted le gustaría comprar un auto y tiene 50,000 dlls pero el automóvil cuesta 68,500. Si usted puede ganar el 9% sobre su dinero ¿Cuánto deberá invertir hoy para compra el auto dentro de 2 años y en todo caso entre 3 años? ¿Tiene usted el suficiente dinero hoy, si partimos de la base de que el precio en dólares seguirá siendo el mismo?

$$VP = [68{,}500/(1.09)^{2}] = 68{,}500/1.1881 = 57{,}655.08$$

, por lo tanto a usted le faltan 7,655.08 dlls si usted estuviera dispuesto a esperar 2 años

$$VP=[68{,}500/(1.09)^{3}] = [68{,}500/1.295029] = 52{,}894.81$$

Si es a 3 años su inversión, el Valor Presente será de 52,894.57dlls y por tanto a usted le faltarían aproximadamente 2,894 dlls

A veces existe publicidad engañosa diciéndole que le pagarán como premio un monto de 100,000 dlls solo por contratar hoy un seguro, cantidad que le será pagada dentro de 25 años. Si la tasa del mercado fuera del 10%, ¿Qué cantidad le estarían pagado hoy?

$$1/(1.1)^{25} = 1/10.83470594 = 0.092296$$

lo que dice que cada peso valdrá 9 centavos del día de hoy a una tasa de descuento del 10% o sea que la promoción le estará pagando realmente 0.0923 x 100,000 = 9,229.59982 que es muy diferente de 100,0000

Este tipo de planteamientos se utilizan engañosamente para venderle a usted seguros de vida, donde le prometen regresar

cierto monto a un plazo muy largo, si usted ¡aún no se ha muerto para entonces!

M=C(1+i)^n								
A cuánto ascendería una inversión de			100	dólares al	10%	en	1	año
C=	**100**							
i=	**0,10**							
período	**1**	año						
C	(1+i)	(1+i) a la potencia	Total **M**					
100,00	1,10	1,10	**110**					

M=C(1+i)^n								
A cuánto ascendería una inversión de			**138.923,50**	dólares al	**7,56%**	en	**5**	años
C=	**138.924**							
i=	**7,56%**							
período	**5**	años						
C	(1+i)	(1+i) a la potencia	Total **M**					
138.923,50	1,08	1,44	**200.000**					

M=C(1+i)^n								
A cuánto ascendería una inversión de			**78.577**	dólares al	**7,25%**	dólares en	**4,5**	años
C=	**78.577**							
i=	**7,25%**							
período	**4,5**	años						
C	(1+i)	(1+i) a la potencia	Total **M**					
78.577	1,07250	1,37	**107.667**					

En cuanto tiempo se triplica		**3**	una inversión con interés simple del			**23,00%**
M=	**3**	C				
3C=	C(1+0.23n)	porque	M=C(1+in)			
3C=	C(1+0.23n)	Se despeja n y se elimina C en ambos lados de la ecuación				
3=	1+0.23n					
3-1=	0.23n					
2=	0.23n					
n=	2/0.23					
n=	**8,6956522**	**años**				

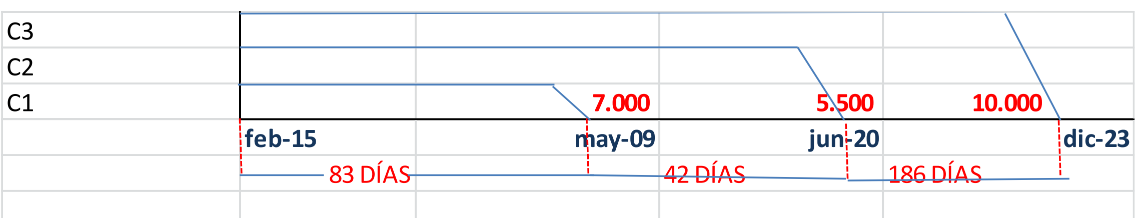
En cuanto tiempo se cuadruplica		**4**	una inversión con interés simple del			**50,00%**
M=	**4**	C				
3C=	C(1+0.23n)	porque	M=C(1+in)			
3C=	C(1+0.23n)	Se despeja n y se elimina C en ambos lados de la ecuación				
3=	1+0.23n					
3-1=	0.23n					
2=	0.23n					
n=	2/0.23					
n=	**6**	**años**				

CONVERSIÓN DE AÑOS, EN AÑOS, MESES Y DÍAS						
SUPONGAMOS QUE DETERMINAMOS UN RESULTADO EN AÑOS EN QUE SE TRIPLICA UNA INVERSIÓN					**8,695652**	AÑOS
PARA EXPRESAR ESTE PLAZO EN AÑOS CON MESES Y DÍAS, LA PARTE DECIMAL SE MULTIPLICA POR 12 (MESES DEL AÑO)						
FRACCIÓN DECIMAL	MESES DEL AÑO					
8,695652 - 8.000000 =						
0,695652174	12	=	**8,34782609**			
ESTO SIGNIFICA QUE	0,695652174	AÑOS SON EQUIVALENTES A			**8,347826**	MESES
AHORA BIEN,	0,34746088	SE MULTIPLICA POR	**30**	DÍAS DEL MES	**10,42383**	DÍAS
	0,42383	SE MULTIPLICA POR	**24**	HORAS DIARIAS	**10,17192**	HORAS
	0,17192	SE MULTIPLICA POR	**60**	SEGUNDOS POR HORA	**10,3152**	SEGUNDOS
SE INTERPRETA COMO QUE LA INVERSIÓN SE TRIPLICA EN 8 AÑOS, 8 MESES, 10 DÍAS, 10 HORAS Y 10 SEGUNDOS						

DIAGRAMAS EN EL TIEMPO						
PARA PLANTEAR Y RESOLVER SITUACIONES EN LAS QUE INTEVRIENE UN NÚMERO GRANDE DE CANTIDADES Y FECHAS,						
POR EJEMPLO, CUANDO UN CONJUNTO DE DEUDAS QUE DEUDORES Y ACREEDORES CONTRAJERON CON ATERIORIDAD SE						
REEMPLAZA POR OTRO QUE ES EQUIVALENTE PERO CON OTROS TIEMPOS Y OTRAS CANTIDADES, SE UTILIZAN GRÁFICAS						
LLAMADAS "DIAGRAMAS DE TIEMPO". CONSISTEN EN UNA SIMPLE LÍNEA RECTA EN LA QUE SE ANOTAN LOS VALORES,						

DIAGRAMAS EN EL TIEMPO						
PARA PLANTEAR Y RESOLVER SITUACIONES EN LAS QUE INTERVIENE UN NÚMERO GRANDE DE CANTIDADES Y FECHAS,						
POR EJEMPLO, CUANDO UN CONJUNTO DE DEUDAS QUE DEUDORES Y ACREEDORES CONTRAJERON CON ATERIORIDAD SE						
REEMPLAZA POR OTRO QUE ES EQUIVALENTE PERO CON OTROS TIEMPOS Y OTRAS CANTIDADES, SE UTILIZAN GRÁFICAS						
LLAMADAS **"DIAGRAMAS DE TIEMPO"**. CONSISTEN EN UNA SIMPLE LÍNEA RECTA EN LA QUE SE ANOTAN LOS VALORES,						
MONTOS, CAPITALES, FECHAS Y PLAZOS DEL PROBLEMA A RESOLVER.						
SI LOS PERÍODOS SON IGUALES, EN ANUALIDADES POR EJEMPLO, EN LUGAR DE UNA LÍNEA RECTA SE UTILIZAN RECTÁNGULOS						
QUE REPRESENTAN LOS PERÍODOS. EN TODO CASO, ES PRECISO, DECIR QUE UN DIAGRAMA DE TIEMPO SIRVE SOLO PARA						
ILUSTRAR LAS CANTIDADES EN TIEMPO.						

¿CUÁNTO DEBERÁ INVERTIRSE AL	35,10%	SIMPLE ANUAL EL 15 DE FEBRERO PAR DISPONER DE			7.000
DÓLARES EL 9 DE MAYO, DE	5.500	EL 20 DE JUNIO Y DE	10.000	EL 23 DE DICIEMBRE?	



ENTRE EL 20 DE JUNIO YU EL 23 DE DICIEMBRE EXISTEN			186	DÍAS
		JUNIO	10	(30-20)
		JULIO	31	
		AGOSTO	31	
		SEPTIEMBRE	30	
		OCTUBRE	31	
		NOVIEMBRE	30	
		DICIEMBRE	23	
			186	

	M=C(1+i)^n					
	C=M/(1+IN)					
	C=M/(1+IN)^-1	PORQUE	A/B=AB^-1			
	EL PRIMERO ES	C1=	7.000	(1+0.351(83/360))^-1		
		C1=	7.000	(1.080925)^-1		
		C1=	7000	(0.925133566) ó C1= 6,475.93		
		C1=	6,475.93			
	EL SEGUNDO ES	C2=	5.500	(1+0.351(125/360))^-1		
		C2=	5.500	(0.891364903) ó C1= 4,902.51		
		C2=	4,902.51			
	EL PLAZO PAR LOS ÚLTIMOS 10,000 ES DE 311 DÍAS, DONDE					
		C3=	10,000(1+0.351)(311/360)^-1			
		C3=	10,000(0.767327208) ó			
		C3=	7,673.27			
		C1+C2+C3=	19,051.71			

EVALUACIÓN DE LAS INVERSIONES

Con objeto de reforzar lo visto, suponga usted que su empresa pretende comprar un activo en 335,000 dlls y que esta inversión es muy segura. Usted vendería el activo dentro de 3 años en 400,000 dlls. a un tipo de cambio de 11.50 pesos promedio por cada dólar, si no hay cambios bruscos en la economía debido a la recesión de los EUA.

Además usted puede invertir los 335,000 en Fondos de Inversión al 10% con poco riesgo ¿Qué piensa de la inversión propuesta? ¿La acepta o la rechaza? Sustente su opinión. Utilice el procedimiento de cálculo de Valor Actual y Valor futuro

$335{,}000(1+i)^3 = 335{,}000\ (1.10)^3 = 335{,}000 \times 1.331 = 445{,}885.00$ dlls = 5,127,677.50 pesos

$400{,}000[1/(1+i)^3] = 400{,}000/(1.1)^3 = 400{,}000/1.331 = 300{,}525.92$ dlls = 3,456,048.08 pesos

Si usted lo calcula por Excel, aplique la siguiente fórmula:

(Excel=VA(0.10,3,,400,000)

Lo que indica que sólo tendríamos que invertir alrededor de 300,000 dlls equivalente a 3,450,000 pesos y no 335,000 equivalente a 3,852,500 para obtener 400,000 equivalente a 4,600,000 pesos dentro de 3 años.

Dicho de otra forma, debido a que la inversión propuesta solo paga 4,600,000 pesos, en lugar de 5,127,677.50 *NO* conviene hacer la inversión y por lo tanto debe rechazar.

INVERSIONES DE MÁS DE UN PERÍODO

Si regresamos a nuestra inversión original de 100 dólares

¿Qué cantidad acumulará usted dentro de dos años suponiendo que la tasa de interés no cambie?

Si usted decide no retirar intereses ni capital y deja 110 dólares en su banco, entonces ganará 110x 0.10 = 11 durante el segundo año, por lo tanto, tendrá 110+11= 121

Estos 121 dólares son el valor de futuro de 100 dentro de 2 años con una tasa constante del 10%

Otra forma de analizar esta situación, es que después de un año usted está invirtiendo efectivamente 110 dólares al 10% considerando que se dispondrá de 1.10 dólares por cada dólar de inversión o sean 110 x 1.1= 121 en total.

Estos 121 dólares se componen de 4 partes:

1. La primera parte es el capital original de 100 dólares;
2. La segunda parte son los 10 dólares de intereses que ganó usted en el primer año;
3. La tercera parte son los otros 10 dólares que obtuvo en el segundo año, lo cual totaliza 120 dólares y;
4. El último dólar que usted adquiere son los intereses que usted ganará en el segundo año sobre el interés pagado en el primero: 10 x 0.10 = 1

El hecho de que usted no disponga de su dinero durante más de un periodo y de cualesquier interés acumulado por una inversión, usted prácticamente estaba reinvirtiendo su interés, a lo cual se le denomina capitalización de intereses, lo que significa que se están pagando intereses sobre intereses, o llamado también interés compuesto. En el interés simple, dicho interés no se reinvierte, sólo se ganan intereses sobre capital original.

$(1+r)^t$ ó $(1+i)^n$ =factor de interés o valor futuro

¿Cuál sería el valor de 100 dólares después de cinco años a una tasa constante de 10% anual?

Valor Capit. A	Intereses C + 10% B	Interés Const 10% C	Int + Int D	C + Interés E
	AxC		B x C	A+B
100	10	0,1	10,1	110
110	11	0,1	1,1	121
121	12,1	0,1	1,21	133,1
133,1	13,31	0,1	1,331	146,41
146,41	14,64	0,1	1,4641	161,051

Por lo tanto el valor presente de 161.051 sería 100/161.051=1

VP = 1 x [1/(1+r)] = $\boxed{\$1/(1+r)}$

En otras palabras, un valor de 100 dlls al 10% durante 5 años con intereses capitalizables será igual a un Valor Futuro de $161.05

En Excel =VF (0.1,5,100) = $161.05

Los valores futuros dependen esencialmente de las tasas de interés sobre todo en inversiones de vida muy larga.

Si usted encuentra una inversión que paga el 12% y decide invertir 400 dólares, cuál será en monto en 3 y 7 años.

$(1+0.12)^{3} = 561.97$ $(1+0.12)^{7} = \boxed{884.27}$

Por lo tanto, en 7 años se tendrá un monto equivalente a más del doble de la inversión original de 400

Valor presente y procesos de descuento.

Al hablar del valor futuro se piensa en ¿A cuánto crecerá mi inversión de 2,000 dólares si gana un interés del 6.5% durante 6 años?

(Excel VF((0.065,6,,2000=2,918.28) = R=2,918.28

Sin embargo, en el área financiera las preguntas siempre se hacen pensando a lo que sucederá en un futuro con respecto a las inversiones. Si usted deseara tener 10,000 dlls dentro de 10 años que puede ganar 6.5% sobre su inversión.

(Excel VA 0.065,10,,10000) = (5,327.26)

¿Cuánto tendría que invertir hoy para lograr su meta?

Es importante recordar los conceptos de tasas equivalentes, tasas nominales y tasas efectivas, que son conceptos indispensables para efecto de comparación y toma de decisiones, cuando se tienen dos o más alternativas de inversión o bien para conseguir dinero prestado. Es también necesario conocer las ecuaciones de valor, fecha focal y los diagramas de tiempo, que son herramientas útiles, tanto para el planteamiento como la resolución de problemas en que intervienen varias fechas y cantidades de dinero.

Por ejemplo, si un país crece a una tasa del 5% anual, el incremento de un período de tres años, ¿Cuál es el interés al término de dichos 3 años? No es, como pudiera pensarse un 15%, sino mayor, debido al incremento poblacional indizado.

Si al comenzar el año existiera en una población dada 10,000 habitantes y al terminar ese primer año o al iniciar el segundo año hay un 5% más, significa que:

Si A=10,000; A1=10,000+0.05(10,000)= (1+0.05)10,000 porque a+ab=a(1+b)

A1=(1.05)10000 o bien =(1.05)A

Al final del segundo año, crece otro 5% y por ello:

A2= A1+0.05A1 = (1.05)A1 = (1.05)(1.05ª) porque A1=1.05ª

A2=$(1.05)^2$ A ya que a(a)=a^2

Al concluir el tercer año, la población será:

A3=A2+0.05A2 A3=(1.05)A2 = (1.05)$(1.05)^2$ porque A2=$(1.05)^2$ A

A3=$(1.05)^3$ A = (14.157625)A $(1.05)^3$ =1.157625

Que puede escribirse como:

A3=(1+0.157625)A

A3=A+0.157625ª

Esto representa un incremento del 15.7625% con respecto a la población original.

VALOR FUTURO

En términos generales, se establece que si se invierte a un período dado, a una tasa de interés "r" (también se utiliza la literal "i"), la inversión crecerá a [1+r] por cada dólar invertido. En este ejemplo "r" ó "i" es del 10% y la inversión crecerá a 1+10% por cada peso o dólar invertido.

Suponga usted que necesitará 1,000 dlls dentro de 2 años, si le garantizan ganar el 7% ¿Cuánto deberá invertir para asegurarse que tendrá los 1000 cuando los necesite? ó dicho de otra manera ¿Cuál será el Valor Presente de 1,000 dentro de 2 años si la tasa será del 7%?

$VP = C=M[\ 1/(1+i)\ ]^{n}$ **$VP= 1000\ ([1/(1+0.07)\ ]^{2}$**

				POTENCIA	
1	+	0,07	1,07	2	1,144900

Excel

= 1000 (1/1.14499) = 1000 (0.873370073) = 873.37

Es decir, necesito invertir hoy $873.44 dlls/Ps para obtener dentro de dos años 1,000 a una tasa anual del 7%

Si usted desea calcular directamente esta cifra utilice la fórmula del VA, donde tasa=0.07 Número de Períodos = 2 VF=1,000 = 873.4387283

Pensemos que a usted le gustaría comprar un auto y tiene 50,000 dlls pero el automóvil cuesta 68,500. Si usted puede ganar el 9% sobre su dinero ¿Cuánto deberá invertir hoy para compra el auto dentro de 2 y en todo caso entre 3 años? ¿Tiene usted el suficiente dinero hoy, si partimos de la base de que el precio en dólares seguirá siendo el mismo?

$VP = [68{,}500/(1.09)]^{2} = 68{,}500/1.1881 = 57{,}655.08$, por lo tanto a usted le faltan 7,655.08 dlls si usted estuviera dispuesto a esperar dos años

$VP = [68{,}500/(1.09)^{3}\ ] = [68{,}500/1.295029] = 52{,}894.81$

Si es a 3 años su inversión, el Valor Presente será de 52,894.57dlls y por tanto a usted le faltarían aproximadamente 2,894 dlls

A veces existe publicidad engañosa diciéndole que le pagarán como premio un monto de 100,000 dlls solo por contratar hoy un seguro, cantidad que le será pagada dentro de 25 años. Si la tasa del mercado fuera del 10%, ¿Qué cantidad le estarían pagado hoy?

$1/(1.1)^{25} = 1/10.83470594 = 0.092296$ lo que dice que cada peso valdrá 9 centavos del día de hoy a una tasa de descuento del 10% o sea que la promoción le estará pagando realmente 0.0923 x 100,000 = 9,229.59982 que es muy diferente de 100,0000 Este tipo de planteamientos se utilizan engañosamente los agentes de seguros para venderle seguros de vida, donde le prometen a usted regresar cierto monto a un plazo muy largo, si usted aún no se ha muerto.

EVALUACIÓN DE LAS INVERSIONES

Con objeto de reforzar lo visto, suponga usted que su empresa pretende comprar un activo en 335,000 dlls y que esta inversión es muy segura. Usted vendería el activo dentro de 3 años en 400,000 dlls. a un tipo de cambio de 11.50 pesos promedio por cada dólar, si no hay cambios bruscos en la economía debido a la recesión de los EUA.

Además usted puede invertir los 335,000 en fondos de inversión al 10% con poco riesgo ¿Qué piensa de la inversión propuesta? ¿La acepta o la rechaza? Sustente su opinión. Utilice el procedimiento de cálculo de Valor Actual y Valor futuro

$335{,}000(1+i)^3 = 335{,}000\,(1.10)^3 = 335{,}000 \times 1.331 = 445{,}885.00$ **dlls = 5,127,677.50 pesos**

$400{,}000[1/(1+i)^3] = 400{,}000/(1.1)^3 = 400{,}000/1.331 = 300{,}525.92$ **dlls = 3,456,048.08 pesos**

(Excel=VA(0.10,3,,400,000)
Lo que indica que sólo tendríamos que invertir alrededor de 300,000 dlls equivalente a 3,450,000 pesos y no 335,000 equivalente a 3,852,500 para obtener 400,000 equivalente a 4,600,000 pesos dentro de 3 años.

Dicho de otra forma, debido a que la inversión propuesta solo paga 4,600,000 pesos, en lugar de 5,127,677.50 NO conviene hacer la inversión y por lo tanto debe rechazar.

INVERSIONES DE MÁS DE UN PERÍODO

Si regresamos a nuestra inversión de 100 dólares

¿Qué cantidad acumulará usted dentro de dos años suponiendo que la tasa de interés no cambie?

Si usted decide no retirar Intereses ni Capital y deja 110 dólares en su banco, entonces ganará 110x 0.10 = 11 durante el segundo año, por lo tanto, tendrá 110+11= 121

Estos 121 dólares son el valor de futuro de 100 dentro de dos años con una tasa constante del 10%

Otra forma de analizar esta situación, es que después de un año usted está invirtiendo efectivamente 110 dólares al 10% considerando que se dispondrá de 1.10 dólares por cada dólar de inversión o sean 110 x 1.1= 121 en total.

Estos 121 dólares se componen de cuatro partes:

5. **La primera parte es el capital original de 100 dólares;**
6. **La segunda parte son los 10 dólares de intereses que ganó usted en el primer año;**
7. **La tercera parte son los otros 10 dólares que obtuvo en el segundo año, lo cual totaliza 120 dólares y;**
8. **El último dólar que usted adquiere son los intereses que usted ganará en el segundo año sobre el interés pagado en el primero: 10 x 0.10 = 1**

El hecho de que usted no disponga de su dinero durante más de un periodo y de cualesquier interés acumulado por una inversión, usted prácticamente estaba reinvirtiendo su interés, a lo cual se le denomina capitalización de intereses, lo que significa que se están pagando intereses sobre intereses, o llamado también interés compuesto. En el interés simple, dicho interés no se reinvierte, sólo se ganan intereses sobre capital original.

$(1+r)^{t}$ ó $(1+i)^{n}$ =factor de interés o valor futuro

¿Cuál sería el valor de 100 dólares después de cinco años a una tasa constante de 10% anual?

100	0.1	10	110
110	0.1	11	121
121	0.1	12.1	133.1
133.1	0.1	13.31	146.41
146.41	0.1	14.641	161.051

Por lo tanto el valor presente de 161.051 sería 100/161.051=1

VP = 1 x [1/(1+r)] = $1/(1+r)

En otras palabras, un valor de 100 dlls al 10% durante 5 años con intereses capitalizables será igual a un Valor Futuro de $161.05

En Excel =VF (0.1,5,100) = $161.05

Los valores futuros dependen esencialmente de las tasas de interés sobre todo en inversiones de vida muy larga.

Si usted encuentra una inversión que paga el 12% y decide invertir 400 dólares, cuál será en monto en 3 y 7 años.

$(1+0.12)^{3} = 561.97$ $(1+0.12)^{7} = \boxed{884.27}$

Por lo tanto en 7 años se tendrá un monto equivalente a más del doble de la inversión original de 400

Valor presente y procesos de descuento.

Al hablar del valor futuro se piensa en ¿A cuánto crecerá mi inversión de 2,000 dólares si gana un interés del 6.5% durante 6 años?

(Excel VF((0.065,6,,2000=2,918.28) = R=2,918.28

Sin embargo, en el área financiera las preguntas siempre se hacen pensando a lo que sucederá en un futuro con respecto a las inversiones. Si usted deseara tener 10,000 dlls dentro de 10 años que puede ganar 6.5% sobre su inversión.

(Excel VA 0.065,10,,10000) = (5,327.26)

¿Cuánto tendría que invertir hoy para lograr su meta?

Es importante recordar los conceptos de tasas equivalentes, tasas nominales y tasas efectivas, que son conceptos indispensables para efecto de comparación y toma de decisiones, cuando se tienen dos o más alternativas de inversión o bien para conseguir dinero prestado. Es también necesario conocer las ecuaciones de valor, fecha focal y los diagramas de tiempo, que son herramientas útiles, tanto para el planteamiento como la resolución de problemas en que intervienen varias fechas y cantidades de dinero.

Por ejemplo, si un país crece a una tasa del 5% anual, el incremento de un período de tres años, ¿Cuál es el interés al término de dichos 3 años? No es, como pudiera pensarse un 15%, sino mayor, debido al incremento poblacional indizado.

Si al comenzar el año existiera en una población dada 10,000 habitantes y al terminar ese primer año o al iniciar el segundo año hay un 5% más, significa que:

Si A=10,000; A1=10,000+0.05(10,000)= (1+0.05)10,000 porque a+ab=a(1+b)

A1=(1.05)10000 o bien =(1.05)A
Al final del segundo año, crece otro 5% y por ello:

A2= A1+0.05A1 = (1.05)A1 = (1.05)(1.05^{a}) porque A1=1.05^{a}

A2=$(1.05)^{2}$ A ya que a(a)=a^{2}

Al concluir el tercer año, la población será:

$A3=A2+0.05A2 \quad A3=(1.05)A2 = (1.05)(1.05)^2$ porque $A2=(1.05)^2 A$

$A3=(1.05)^3 A = (14.157625)A \qquad (1.05)^3 =1.157625$

Que puede escribirse como:

$A3=(1+0.157625)A$

$A3=A+0.157625^a$

Esto representa un incremento del 15.7625% con respecto a la población original.

Continuación: Valor presente y Procesos de Descuento

De forma hipotética, si el Índice de Precios y Cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores (IPC) descendiera por ejemplo dos puntos porcentuales cada semana, el porcentaje acumulado en 4 semanas no sería del 8% (2% x 4 semanas) sino menor, ya que tiene también en este caso la baja en cualquier semana, depende de la habida en la semana que le precede. Supongamos ahora que la inflación acumulada en el trimestre no será la suma de los porcentajes que determinamos, sino mayor por razones similares a las anteriores, por tanto, se daría un crecimiento o decrecimiento sobre el último dato observado.

Las situaciones antes descritas pueden ser la base para el estudio del Interés Compuesto y se presentan generalmente cuando los incrementos o variaciones se dan en porcentajes.

Los incrementos pueden ser constantes durante un lapso dado más o menos largo o bien pueden cambiar de un período a otro. En el primer caso se utilizan las fórmulas y los procedimientos de las progresiones geométricas y en el segundo caso, cuando no son constantes, la variación total se obtiene considerando la variación individual, paso a paso.

VARIACIÓN CONSTANTE

Si la variación en los valores permanece fija, entonces el desarrollo operativo se simplifica como sigue: Inflación Semestral dada la misma en formato mensual

Ejemplo: Si la inflación mensual promedio durante 6 meses ha sido del 1.2%

¿De cuánto será la inflación acumulada del semestre?

Si suponemos que el primer día del semestre, el precio de un artículo de la canasta básica fue de Co pesos; al final del primer mes, es decir al comenzar el segundo mes, el precio es un 1.2% mayor, es decir, que al final del primer mes el incremento es del 1.2%

$$C1=Co+0.012Co$$

$$C1=Co(1+0.012) = Co(1.012)$$

Si al final del segundo mes se incrementa en otro 1.2%

$$C2=C1+0.012C1$$

$C2=C1(1.012))(1.012)$ porque $C1=Co(1.012)$ ó $C2=Co(1.012)^2$

De igual forma al final del tercer mes se tiene:

$$C3=C2+0.012C2$$

$$C3=C2(1.012)$$

$C3=Co(1.012)^2\ (1.012)$ ya que $C2=Co(1.012)^2$

Por lo tanto al final del semestre, el precio del artículo es:

$C6=Co(10.12)^{6}$ ya que el exponente es igual al subíndice C. Esto es igual a
$C6=Co(1+0.0741947873)$ ó $=Co(1.074194873)$
Se expresa como $C6=Co(1+0.0741947873)$ ó como
$C6=Co+0.074194873Co$

Lo anterior significa un incremento del 7.4195% aproximadamente, con respecto al precio original

Por lo tanto, la inflación del semestre es de 7.4191% y no del 7.2% que es el resultado de multiplicar la inflación mensual de 1.2% por 6 meses.

Cuando la variación es constante, el valor de cualquier C se obtiene por la fórmula $a_n=a_1(r)^{n-1}$ para las progresiones geométricas donde r, la razón es igual a (1+v) y v es la tasa de crecimiento o decrecimiento de la variable, como la inflación.

VARIACIÓN NO CONSTANTE

¿Cuál será el porcentaje de inflación en el primer cuatrimestre del año, si en los meses de enero, febrero, marzo y abril fue del 1.2%, 0.9%, 1.3% y 1.5% respectivamente?

La solución es similar. Si al iniciar el mes de enero o bien al terminar el mes de diciembre anterior, el costo de un artículo que varía con la inflación es C, al finalizar el mes de enero serpa de un 1.2% mayor, es decir:

C1= C+0.012C
C1= (1+0.012)C
C1= (1.012)C

Es decir, se factoriza "C" y se reduce a:

El 1.2% de C se expresa como (0.012)C

A finales de febrero, el costo crece otro 0.9%, por lo tanto:

C2= C1+0.009C, 0.009 representa el 0.9%
C2= (1.009) C1
C2= (1.009) (1.012C) ya que C1=1.012C

Al terminar el mes de marzo, hay otro incremento del 1.3% donde:

C3= C2+0.013C2
C3= (1.013) C2
C3= (1.013) (1.009)(1.012)C, Se reemplaza a C2

Al final del cuatrimestre el precio del artículo es un 1.5% mayor por ello:

C4=C3+0.015C3
C4=(1.015)C3
C4=(1.015)(1.013)(1.009)(1.012)c
C4=(1.04989814)C

Que se puede expresar como sigue:

C4=(1+0.04989814)C

Lo cual significa un incremento total del 4.989814% y por supuesto esta cifra es mayor que el 4.90% que es la suma de los 4 porcentajes.

Ejemplo:

Porcentajes del incremento en Ventas

a) **¿En qué porcentaje han crecido las ventas de una exportadora de artesanías en sus primeros 6 años, si del primero al segundo año crecieron 3%, del segundo al tercer año un 3.7% y así sucesivamente 5.2%, 7.1% y 10.5%?**
b) **¿De cuánto serán sus ventas en el sexto año sin el primero exportó 750,300 dólares con un tipo de cambio proyectado de 11.60 por cada dólar?**

Solución:

a) Supongamos que las ventas del primer año fueron V1, en el segundo fueron 3% mayores, por tanto:

V2=V1+0.03V1
V2=(1.03)V1

En el tercero son un 3.7% mayores, por lo que

V3=(1.037)V2
V3=(1.037)(1.03)V1 porque V2=1.03V1

En el cuarto año y los subsiguientes, las ventas son:

V4=(1.052)(1.037)(1.03V1)
V5=(1.071)(1.052)(1.037)(1.03V1) y
V6=(1.105)(1.071)(1.052)(1.037)(1.03V1)
V6=(1.329791246)V1
ó V6=(1+0.329791246)V1

que representan un incremento total del 32.98% aproximadamente en los 6 años, incremento que es mayor al 29.5% que resultan de sumar los 5 porcentajes.

b) Las ventas en el sexto año, si en el primero fueron de US 750,300 con los incrementos dados son:
V6=(1.329791246)(750300)

V6=US 997,742.37 por el tipo de cambio digamos de 11.60 **para obtener su valor en pesos =$11,573,811.49**

1. **La producción de automóviles en 200720 fue de 175,000 unidades ¿De cuánto será en el año 2021 y 2022 si ésta crece un 8% anual en los primeros dos años, 2023 un 10.5% en los siguientes tres años y posteriormente un 7.6% anual? 69.33 R= 369,166 296336.17**

2. **El PIB creció 3.6% en 2018, 2.8% en 2019, 0.6% en 2020 y 3.5% 21 puntos porcentuales en 2022. En 2023 se redujo 6.9 puntos porcentuales para después crecer 5.1 puntos en 2024, 7 puntos en 2025 y 4.5 puntos en 2026 ¿De cuántos puntos porcentuales fue el incremento acumulado del PIB desde 19912018 hasta 19982026? R=21.323%**

RECAPITULACIÓN DEL CONCEPTO DEL INTERÉS COMPUESTO

En el interés compuesto, los intereses que se devengan en un período se agregan o suman al Capital C y desde el segundo período generan sus propios intereses. Puede suceder que la tasa sea variable, en cuyo caso se procede como en los ejemplos ya vistos, o bien que sea constante y entonces deberá seguirse el procedimiento siguiente:

Suponga Ud. que se depositan $1,000 en una cuenta bancaria que paga el 36% de interés anual, compuesto por meses ¿Cuál será el monto acumulado al final de año y medio?

Decir que el interés es compuesto por meses significa que cada mes los intereses que se generan se capitalizan es decir, se suman al Capital.

Para los intereses del mes, el capital se multiplica por la tasa mensual 36%/12=0.03 y por tanto, al término del primer mes el monto del Capital C1 es:

$$M1=1{,}000+0.03(1000) \quad M1=1{,}000(1+0.03) = C1(1.03)$$

$$M1=1{,}000(1.03) \text{ o bien } M1=1{,}030$$

Al comenzar el segundo período mensual, el capital es de 1,030 y el interés mensual es del 3%, por lo que el Monto M a final de ese mes es:

M2=1,030 + 0.03 (1,030) M2=1,030(1.03) M2=1,000(1.030)(1.03) porque 1030=1000(1.03)

$$a(a)=a^2$$

$M_2=1{,}000(1.03)^2$ $M_2=1{,}060.90$

Al final del tercer mes, el monto es:

$M_3=1{,}060.90\ (1.03)$

$M_3=1{,}000(1.03)^2\ (1.03)$ $1060.90=1000(1.03)^2$

$M_3=1{,}000(1.03)^3$ ya que $a^m\ a^n = a^{m+n}$

Por lo tanto cada uno de estos montos se pueden expresar como el producto de los 1000 originales y una potencia de n de 1.03 que es igual al mes que concluye. El monto acumulado en año y medio, al final de 18 meses es por tanto:

$M_3=1{,}000(1.03)^{18}$ o bien $M_{18}=C1(1.03)^{18}$ $M_{18}=1000(1.702433061)$ $M_{18}=\$1{,}702.43$

Para efectos de comparación, debe notarse que si la inversión se hace con interés simple, el monto al final es menor ya que:

$M=1000(1+18(0.03))$ $M=C(1+ni)$

$M=1000(1.54)$ ó $M=\$1,540$

Del mismo modo es cierto que si ahora se capitalizaran los intereses en forma quincenal, el monto se incrementaría, ya que la tasa por quincena será de 0.36/24=0.015 y el monto después de 36 quincenas (año y medio sería:

$M_{36}=1,000(1+0.015)^{36}$ $M_{36}=1,000(1.709139538)$ $M_{36}=\$1709.14$

Por lo anterior, se confirma que si se reduce el tiempo en que los intereses se capitalizan, el monto aumento, es decir, resulta más productivo pues los intereses producen más intereses más rápido y con mayor frecuencia.

“**El tiempo entre dos fechas sucesivas en las que los intereses se agregan al capital se llama PERÍODO DE CAPITALIZACIÓN y el número de veces por año en que los intereses se capitalizan se le llama FRECUENCIA DE CONVERSIÓN y se conoce como P**”

A la Frecuencia de Conversión se le conoce en el medio financiero como

Frecuencia de Capitalización de Intereses.

Una afirmación es que si el período de capitalización en mensual, entonces las siguientes expresiones son equivalentes: “el interés es compuesto por meses”, “capitalizable por meses” “convertible mensualmente” o “interés nominal mensual”. En estas condiciones el valor de “p” es doce.

Los valores más usuales para la frecuencia de la conversión p, son:

P=1	**Para períodos anuales**
P=2	**Si los períodos son semestrales**
P=3	**Para los períodos cuatrimestrales**
P=4	**Para los períodos trimestrales**
P=6	**Cuando son períodos bimestrales**
P=12	**Para períodos de un mes**
P=13	**Si los períodos son de 28 días y**
P=24,	**52 y 360 ó 365 para períodos quincenales, semanales y diarios respectivamente.**

Los períodos de capitalización pueden ser tan pequeños como se desee, llegando a tasas de con capitalización instantánea y se comprueba algebraicamente como:

$M=Ce^{in}$ donde **e**=2.71828…; **i** es la tasa convertible instantánea y **n** es el tiempo en años

Si p es la frecuencia de conversión, entonces la tasa por período es i/p, por lo que la fórmula general para el monto con interés compuesto es la del siguiente teorema.

El monto acumulado M de un capital C al final de np períodos es $M=C(1+i/p)^{np}$
Donde **n**=plazo en años **np**= es el número de períodos **e**
i=tasa de interés anual capitalizable en p períodos por año

Esta ecuación es conocida como la fórmula del interés compuesto.

Ejemplo ¿Qué capital debe invertirse ahora al 32.7% capitalizable por bimestres para tener 40,000 en 10 meses? ¿A cuánto ascienden los intereses?

El plazo n debe ser calculado en años, por lo que para expresar 10 meses en años se divide entre 12 meses. n=10/12. La frecuencia de la conversión o capitalización de intereses es p=6, por que son 6 bimestres que tiene un año, entonces, np = (10/2)=5 bimestres

El monto M=40,000, la tasa de interés es i=0.327 o 32.7% anual, capitalizable por semestres, y la incógnita es C que se despeja de la igualdad que resultó de sustituir estos valores en la ecuación del teorema ya apuntado.

$40000=C(1+0327/6)^{5}$ $40000=C(1.0545)^{5}$ $40000=C(1.303865879)$

$C=40000/1.303865879$ de donde $C=$ \$30,678

Los intereses son la diferencia entre el M y C I = (40,000) – (30,678)

Por tanto, I = 9,322

Con objeto de que refuerce lo comentado anteriormente, a continuación se presentan algunos ejercicios:

40000/(1+(0327/6)$_{5}$)= 30,678

¿Cuál es el valor comercial de un pagaré con VN de US 750,
si se descuenta con el 33.5% simple anual 3 meses antes de
su vencimiento? R= US 687.19

D=Mnd	Valor Original		750.00
M= 750	D=(750)(0.335)(0.25)	menos:	62.8125
d=0.335	Valor Comercial después del Descuento		687.19
t=3/12=0.25			

¿ En cuánto se negocia el 15 de marzo un documento con VN de
$350,000 con vencimiento al 15 de agosto y descuento del 37% R=296,041.67
simple anual?

		Valor Nominal	350,000.00
D=Mnd	D=(350000)(0.37)(0.4166666666)		53958.33332
M= 350,000			296,041.67
d=0.37			
t=5/12=0.41666666666			

¿Cuál es el valor nominal de un documento que 5 meses antes de su
vencimiento se negocia en 25,000 al 32.5% de dcto. simple anual?

D=Cdt/1-dt=(25000)(0.325)(5/12)/1-((0.325)(5/12)) R=28,915.66

M=25000	(25000)(0.4166666666)(0.325)		3915.662651
n=5/12=0.4166666666			
		Valor Nominal Original	25,000.00
			3,915.66
			28,915.66

¿Cuántos días antes del vencimiento se comercializa un pagaré en
4,750, si su valor nominal es de 5,200 y el descuento es del 26.4%
simple anual? R=118 días

D=M-C = 450		
D=Mtn		0.022846154
M= 5,200	D=5200-4750= 450 450=(5200)(0.264)(t)	
C= 4,750	t=450/5200*0.264 = 450/1372.80	0.327797203
d = 0.264	Para convertirlo a días se multiplica por 360	118.006993
n=X		

Obtenga la tasa de descuento simple anual de un documento cuyo VN es de 2,400
y se vende en 2,240 tres meses antes de su vencimiento R=26.67%

M= 2400	Cnt= 2400x025*d		
C= 2240	Mt=2400*0.25=600		
t= 3/12 = 0.25	D=2400-2240= 160		
D=X D=Mdt	160=600d d=160/600		0.266666667
		o bien	26.67%

Una empresa descuenta un documento y recibe 8,700. La tasa de
descuento fue del 21.5% simple anual y el VN fue de 10,000
¿Cuánto faltaba para su vencimiento? R=218 días

C=M(1-nt)	C=10000(1-n0.215)= 8700=10000(1-n0.215)
	8700/10000-1=-n(0.215) = 0.13=-n0.215
	n=0.13/0.215=0.6046512 x 360=217.67 días

Monto que se acumula al invertir un capital

3385.41 este es el resultado correcto.

Planteamiento del Problema:

Obtenga el Monto que se acumula en dos años si un Capital de $65,000 se invierte al 40% integrado por semestres:

Solución

El capital es C=65,000, la tasa anual es i=0.4 la frecuencia de conversión es de p=2, ya que son dos semestres al año, n=2 desde que el Capital se acumula dos años, el número de períodos en el plazo es np=4 (4 semestres), entonces el monto según el teorema 4.1 es:

$M=65,000(1+0.40/2)$, ya que $M=C(1+i/p)^{np}$

$M=65,000(1+0.40/2)^{4}$

$M=65,000(2.0736)$

$M=\$134,784$

Ejemplo sobre la **Tasa de Interés para Duplicar un Capital**.

Planteamiento del Problema:

¿**Con qué tasa de interés anual capitalizable por bimestres se duplica un capital en 3 años**?

Solución

Si el Capital **C** se duplica en 3 años, entonces el monto es **M**=2C, el plazo es n=3, la frecuencia de conversión es p=6, que son el número de bimestres por año y el número de períodos bimestrales en el plazo es **np** = 3 (6)=18

$$2C=C(1+i/6)^{18} \qquad M=C(1+i/p)^{np}$$

$$2=(1+i/6)^{18}$$

Como C está en ambos lados de la ecuación, se elimina:

$$\sqrt[18]{2} = 1+i/6 \quad \text{ya que} \quad \sqrt[n]{a^n} = a$$

$$1.039259226=1+i/6$$

Se le resta 1 en ambos lados de la ecuación y después se multiplica por 6

$$(0.039259226)6 = i \quad \text{o bien} \quad i=0.235555356$$

Lo anterior significa que para duplicar un capital en tres años deben invertirse aproximadamente al **23.56% anual capitalizable por bimestres**.

Ejemplo sobre el Plazo en inversión de un capital

Planteamiento del Problema:

¿Qué día deberá invertir usted la cantidad $10,000 para disponer de $11,538 el 11 de mayo? Suponga que la inversión genera intereses del 39% compuesto por semanas

Solución

La incógnita es x=np, el plazo se proporciona en semanas, la frecuencia de conversión es p=52, ya que son precisamente 52 semanas que componen a un año, el Capital C=10,000 y el monto del capital es M=11,538 y se sustituyen valores en la ecuación:

$$M=C(1+i/p)^{np}$$

$$11{,}538=10{,}000(1+0.39/52)^{x}$$

$$11{,}538/10{,}000=(1.0075)^{x}$$

$$1.1538=(1.0075)^{x} \text{ o bien } (1.0075)^{x} = 1.1538$$

En este caso se toma el logaritmo natura Ln en ambos lados, ya que si dos números positivos son iguales, sus logaritmos son iguales.

$$\text{Ln } (1.0075)^{x} = \text{Ln}(1.1538)$$

$$(X)\text{Ln}(1.0075)= \text{Ln}(1.1538) \qquad \text{Log}_a (M)^{n} = (n) \text{ Log}_a(M)$$

$$X=\text{Ln}(1.1538)/\text{Ln}(1.0075)$$

$$X=0.143060843/0.007472015$$

ó $X=19.146220038$

Este resultado puede ser redondeado a 19 semanas y con eso el monto será un poco menos de los 11,538. Pero debemos convertirlos a días multiplicándolo por 7 días, o sea, 19.146220038 (7) = 134.023547 o sean 134 días y por lo tanto aplicando una tabla específica o bien calculándolo manualmente se determina que será el 28 de diciembre del año inmediato anterior.

Con objeto de reforzar lo visto, desarrolle usted los siguientes ejercicios:

1) ¿Qué capital debe invertirse en una cuenta que paga el 33.6% anual capitalizable por meses para disponer de 13,000 en 7 meses?

Respuesta= 10,714.98 (Excel VA((0.336/12),7,,13000)*-1= **$10,714.98**

2) ¿Cuánto se acumula en una cuenta de inversión que reditúa el 18.6% anual capitalizable por bimestres en un plazo de 2 años, si se invierten $35,000?

Respuesta=**50,486.12**

3) ¿En cuánto tiempo se liquidará un crédito de $175,000 con intereses del 24.96% compuesto por quincenas y un pago final de $230,000?

Respuesta = 26 quincenas

INTERESES

Podríamos pensar de manera hipotética en un país donde se manejara solamente dinero en efectivo.

En ese lugar imaginario o utópico, todas las transacciones tendrían que liquidarse en moneda contante y sonante y las personas tendrían que guardar sus ahorros debajo del colchón.

En una economía de esta naturaleza, no solamente resultaría incómoda y peligrosa, sino además muy ineficiente.

Por ello, todas las economías modernas trabajan con base en créditos, es decir, en la confianza de que, al prestar o facilitar bienes, servicios o dinero, posteriormente serán pagados.

De hecho, la palabra "crédito" viene del latín "credere" que significa creer o confiar; entonces, la mayoría de las transacciones se realizan con base en la confianza.

Ahora bien, cuando se usa un bien ajeno con propósitos lucrativos, es necesario pagar una cantidad de dinero por ese uso; pero si se trata de bienes comunes, a ese pago se le denomina alquiler o renta; en el ámbito y lenguaje financiero, al alquiler pagado por utilizar el dinero ajeno (o que cobramos al prestatarlo) se le conoce como interés o intereses, o bien le llamaremos rendimiento para efectos de inversión.

De la necesidad de calcular los intereses surgieron las matemáticas financieras.

La forma más sencilla de calcularlos se denomina interés simple; para su cálculo, se consideran los meses como si todos tuvieran 30 días y los años, 360 días, que es lo que los bancos usa como tiempo de un año; a esto se le denomina: "tiempo comercial".

El descuento, que se divide en descuento comercial y justo o exacto, es una aplicación importante del

interés simple, pues uno de los principales instrumentos del Gobierno Federal para controlar la economía, que son los CETES (Certificados de la Tesorería de la Federación), trabajan a descuento.

A fin de calcular distintas alternativas de pago de obligaciones o cobro de derechos, de manera que las partes reciban o entreguen cantidades de dinero que representen lo mismo, con el objetivo de que, tanto el que paga como el que cobra, conserven el valor real de sus derechos u obligaciones, se emplean las ecuaciones de valores equivalentes para la reestructuración.

En una operación matemática financiera intervienen básicamente tres elementos fundamentales: el capital, la tasa de interés y el tiempo o plazo. El interés es la cantidad que debe pagar una persona por el uso del dinero tomado en préstamo.

Interés

- **Los intereses es el dinero que se pagará por el uso del dinero ajeno. En el caso de créditos se paga; en el caso de inversión nos pagan.**

Tasa de interés

- **Tasa de interés es la razón de los intereses devengados entre el capital en un lapso. Se expresa en tanto por uno o en tanto por ciento.**

Tiempo

- **Tiempo es el número de unidades de tiempo que transcurren entre la fecha inicial y final en una operación financiera. Se conoce también como plazo.**

Capital

- **El capital es una cantidad o masa de dinero localizada en una fecha o punto inicial de una operación financiera, igual se le puede llamar principal, valor actual, valor presente, es el valor del dinero en este momento.**

Monto

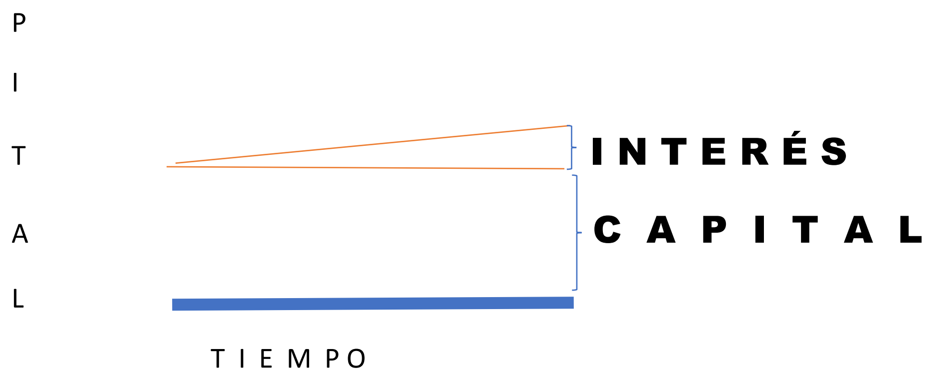
- **Monto es el valor del dinero en el futuro, es el capital más los intereses generados, igual se le puede llamar capital futuro o valor acumulado**

Un diagrama de valor-tiempo se utiliza para representar gráficamente la operación financiera, situando en el eje horizontal el o los periodos de tiempo y, en el eje vertical, el capital inicial, el monto de intereses y en su caso el capital final.

Diagrama de valor-tiempo

C

A



Inversión de dinero a interés simple

El interés simple es aquél que se calcula sobre un capital inicial que siempre permanece invariable en el tiempo; los intereses se manejan por separado y se retiran del Monto (Capital + Intereses) de la operación financiera.

En consecuencia, el interés que se obtiene en cada intervalo unitario de tiempo es siempre el mismo.

Los objetivos de las inversiones

En su aspecto lucrativo, el objetivo de una inversión es incrementar lo más posible el capital inicial (C), invertido en un determinado lapso, a una tasa de interés determinada para obtener un monto futuro (M). Por otra parte, se pueden retirar los intereses generados para una diferente utilización y se puede también retirar o no el capital inicial. O bien se puede cerrar una operación al retirar el Capital más los intereses.

C

Es el Capital inicial también llamado Principal o Actual y suele llamarse Valor Presente y se simboliza por "A" o "P"

M

Es el capital final que ya incluye el capital inicial más los intereses. También se le llama Monto o Dinero Incrementado. Es el valor futuro de C que ya se incrementó con los intereses generados por el tiempo y la tasa de interés.

I

Es la cantidad de intereses generados en un cierto período o lapso y es la diferencia entre M menos C

i

Es la tasa de interés acordada y es el costo o bien el rendimiento del capital, ya sea por un préstamo o por una inversión que se haga.

n

Es el tiempo o lapso en días, semanas, meses, años, lustros que permanece prestado un capital o bien, en su caso invertido ese capital.

Ejemplos:

♣ **Si la tasa es anual y el tiempo son 5 años;** $n = 5$

♣ **Si la tasa es anual y el tiempo son 7 meses;** $n = 7/12$

♣ **Si la tasa es mensual y el tiempo son 2 años;** $n = (12)(2) = 24$

♣ **Si la tasa en trimestral y el tiempo son 5 años;**

$n = (5)(4) = 20$

♣ **Si la tasa es anual y el tiempo son 5 cuatrimestres;**

$n = 5/3$

Conclusión: siempre se convierten las unidades de tiempo a las unidades a que hace referencia la tasa de interés. La tasa de interés dada en porcentaje (%) se divide siempre entre 100. Ejemplos ♣ 12%; para realizar la operación será

- ♣ $12/100 = 0.12$ **(tanto por 1)**
- ♣ **5% ;** $5/100 = 0.05$ **(tanto por 1)**
- ♣ **27%; 0.27 (tanto por 1)**

FÓRMULA I = C i n

I = Cálculo del Interés

C = Capital

i = Tasa de interés

n = Tiempo

¿Qué interés produce un capital de 40,000 en un año 7 meses y 21 días al 24% anual?

I =	C.i.n				40,000.00	X	24/360	X	591	
I =	X						0.24/360			
C=	40,000				40,000	x	0.00066667	x	591	15,760.00
n=	12	MESES	360							
	7	MESES	210							
	21	DÍAS	21	591	DÍAS					
i=	24%	ANUAL		0.24		0.0000				

Si se conoce el monto futuro, el capital inicial y el tiempo:

$$i = \frac{\frac{M}{C} - 1}{n}$$

Si se conoce el capital inicial, el monto de intereses y el tiempo:

$$i = \frac{I}{Cn}$$

¿Cuál es la tasa de interés (*i*) a la que ha estado invertido un capital de $110,000.00 (*C*) que durante dos años y 5 meses (*n*) produjo $39,875.00 de interés (*I*)?

$i = \frac{I}{Cn}$	
Datos	$C = 110{,}000$ $I = 39{,}875$ $n = 2$ años 5 meses $= 29$ meses
Procedimiento	$i = \frac{39{,}875}{110{,}000 \times 29} = 0.0125 \; = 1.25\%$ $C = \$110{,}000.00$ $I = \$39{,}875.00$ $t = 2$ años y 5 meses $= 29$ meses $i = \frac{I}{Ct} = \frac{39{,}875}{(110{,}000)(29)}$ $= 0.0125 \; mensual \; 1.25\% \; mensual$ Si el interés es de 1.25% cada mes, corresponde 15% anual obtenido de multiplicar 1.25 x 12 meses que tiene un año.

Ejemplo 3

¿A qué tasa de interés fueron invertidos $18,000.00 si generaron $3,600.00 en un plazo de cinco bimestres? Da la tasa de interés anual.

Solución

$$i = \frac{I}{Cn}$$

Procedimiento

$$i = \frac{I}{Cn} = \frac{3600}{(18000)(5)} = 0.04\ bimestral$$

Para hacer la tasa de interés anual = (0.04)(6) = 0.24 anual

Nota: Si la tasa de interés es la incógnita, la unidad de tiempo será la que se maneje en la variable de tiempo.

Cálculo del tiempo requerido para que una inversión genere cierto rendimiento El mayor o menor tiempo de pago de una operación financiera representa un mayor o menor costo para un deudor o un mayor o menor rendimiento si se trata de una inversión. Por lo tanto, la relación entre tiempo y tasa es muy estrecha y va en proporción directa, si es una inversión, o inversa, si se trata de un financiamiento. Se supone que en una economía débil el poder contar con más tiempo significará mayor oportunidad de pago o de acumulación de capital

Fórmulas para calcular el tiempo o plazo en una inversión a interés simple:

Si se conoce el monto futuro, el capital inicial y la tasa de interés:

$$n = \frac{\frac{M}{C} - 1}{i}$$

Si se conoce el capital inicial, el monto de intereses y la tasa de interés:

$$n = \frac{I}{Ci}$$

Ejemplo 4.

¿Cuánto tiempo (n) habrá estado invertido un capital de \$85,000.00 (C) que produjo un interés de \$35,700.00 (I) a una tasa anual de 21% (i)?

Solución

$n = \frac{I}{Ci}$	
Datos	C = 85,000 I = 35,700 i = 0.21
Procedimiento	$n = \frac{35{,}700}{85{,}000 \times 0.21} = 2\ años$ **Nota:** Cuando se pide la tasa de interés en años, automáticamente la tasa saldrá anualizada. Es decir, toma la unidad de tiempo que maneja la tasa de interés.

Ejemplo 5

Calcular en cuánto tiempo se acumularían $50.000.00 si el día de hoy se invierten $40,000.00 a una tasa:

a) Del 0.5% mensual

b) Si se obtiene una tasa de rendimiento del 1% mensual, ¿qué pasa con el tiempo?

Solución a) Tasa 0.5% mensual

$n = \dfrac{\frac{M}{C} - 1}{i}$	
Datos	$M = 50{,}000$ $C = 40{,}000$ $i = 0.005$
Procedimiento	$n = \dfrac{\frac{50{,}000}{40{,}000} - 1}{0.005}$ n = 50 meses = 4.166667 años = 4 años, 2 meses, 0 días

Solución b) Tasa 1.0% mensual

$n = \dfrac{\frac{M}{C} - 1}{i}$	
Datos	$M = 50{,}000$ $C = 40{,}000$ $i = 0.01$
Procedimiento	$n = \dfrac{\frac{50{,}000}{40{,}000} - 1}{0.01}$ n = 25 meses = 2.083333 años = 2 años, 1 mes, 0 días

Monto de un capital utilizando interés simple Se conoce por monto a la suma del capital (C) más el interés (I) (también se le denomina valor futuro, valor acumulado o valor nominal.) Fórmulas para calcular el monto futuro de una inversión a interés simple: Si se conoce el capital y monto de intereses:

Si se conoce el capital y el monto de intereses:

$$M = C + I$$

Si se conoce el capital, tasa y tiempo:

$$M = C + Cin \text{ o sea:}$$

$$M = C(1 + in)$$

Monto de intereses *I* a partir de *M* y *C*:

$$I = M - C$$

En función de la fórmula del monto, puede ser necesario calcular el capital, el tiempo o la tasa; en tal caso, se procederá a despejar la incógnita de la fórmula básica. A continuación, mediante ejercicios, se analizan las fórmulas anteriores (conviene que realices los cálculos para que comprendas cómo se resolvieron cada una de las literales).

Cálculo del monto (M)

Ejemplo 6

Si invierto $40,000.00 en una cuenta de ahorros que paga una tasa de interés de 24% a un plazo de 1 año 7 meses y 21 días, ¿cuánto dinero obtendré al final del plazo?

Solución

$M = C(1 + in)$	
Datos	$C = 40{,}000$ $i = 0.24$ n = 1 año, 7 meses 21 días = 591 días
Procedimiento	$M = 40{,}000\left(1 + \frac{0.24 \times 591}{360}\right) = 55{,}760$

Ejemplo 7

En una cuenta bancaria se invierten \$56,000.00, ganando intereses de 12.3% anual.

a) ¿Cuál es su capital futuro en 3 años y los intereses ganados?
b) Calcular los intereses ganados.
c) Interpretación.

Solución a) Capital futuro

$M = C(1 + in)$	
Datos	$C = 56{,}000$ $i = 0.123$ $n = 3$
Procedimiento	$M = 56{,}000\ (1 + 0.123\times3)$ $M = 56{,}000\times1.369$ $M = 76{,}664$

Solución b) Intereses ganados

$I = M - C$	
Procedimiento	$I = 76{,}664 - 56{,}000$ $I = 20{,}664$

Interpretación: El monto de intereses en 3 años representa 36.9% sobre el capital invertido.

25

Ejemplo 7

En una cuenta bancaria se invierten $56,000.00, ganando intereses de 12.3% anual.

a) ¿Cuál es su capital futuro en 3 años y los intereses ganados?
b) Calcular los intereses ganados.
c) Interpretación.

Solución a) Capital futuro

$M = C(1 + in)$	
Datos	$C = 56{,}000$ $i = 0.123$ $n = 3$
Procedimiento	$M = 56{,}000\ (1 + 0.123 \times 3)$ $M = 56{,}000 \times 1.369$ $M = 76{,}664$

Solución b) Intereses ganados

$I = M - C$	
Procedimiento	$I = 76{,}664 - 56{,}000$ $I = 20{,}664$

Interpretación: El monto de intereses en 3 años representa 36.9% sobre el capital invertido.