



## SELECCIÓN DE CARTERA

Prácticamente **todos valores que se pueden invertir**, tienen **resultados inciertos** y por lo tanto se convierten en **riesgosos**.

El problema al que usted se va enfrentar como inversionista es precisamente **en qué determinados valores riesgosos comprar y poseer**.

Debido a que **una cartera está conformada por un grupo de valores**, esta situación por resolver, es similar a la que se enfrenta un inversionista cuando tiene que seleccionar una cartera óptima entre un conjunto de carteras posibles.

Por ello, esta situación se conoce como **“problema de la selección de cartera”**. Harry M. Markowitz propuso una solución a este problema, que se denomina en actualidad el origen de la **Teoría Moderna de Cartera**.

Este método comienza con la **suposición de que un inversionista posee una suma determinada de dinero para invertir en el presente**. Este dinero será invertido durante cierto periodo, conocido como el **período de tenencia** del inversionista. Al finalizar, dicho periodo de tenencia, el inversionista venderá los valores que compró y utilizará las utilidades ganadas al absorber los gastos, o bien, los reinvertirá en varios valores, o bien, podrá decidir hacer ambas cosas.

En este punto, el método de Markowitz puede volverse a aplicar a las utilidades generadas por la inversión previa o beneficios que se van a **reinvertir**. Por lo tanto, este método se utiliza para un solo periodo a la vez, donde el principio de dicho periodo se expresa literalmente como (inversión al inicio)  **$t = 0$**  y el final de dicho periodo se expresa como (resultado de la inversión)  **$t = 1$** . Consecuentemente, en  **$t = 0$** , el inversionista **debe decidir que valores comprar y que valores conservar hasta  $t = 1$** . Por lo tanto, en  **$t = 1$** , el inversionista **debe decidir nuevamente que valores va a conservar hasta  $t = 2$** , y así sucesivamente, cuando  **$t = n$** .

Para poder tomar la decisión cuando esté en  **$t = 0$** , **usted como inversionista debe estar consciente de que no puede saber cuáles serán los rendimientos de valor y por lo tanto tampoco podrá saber cuál será el valor de la cartera en el próximo período**.

Sin embargo, sí se pueden calcular los **rendimientos de periodo de tenencia esperados**, o sea, los “**rendimientos esperados**” de sus diversos valores, en invertir obviamente en el que tenga el rendimiento esperado más alto. De acuerdo con Markowitz, esta decisión generalmente no es recomendable porque el inversionista típico quiere “que los rendimientos sean altos”.

¿**Cuáles son los dos objetivos que usted debe considerar al tomar una decisión de inversión en cartera?**

Los objetivos son:

- a) **Maximizar el rendimiento esperado**, y
- b) **Minimizar la incertidumbre**, o sea el **riesgo**, por lo que el inversionista tiene sus dos objetivos en conflicto o en contraposición, mismos que debe evaluar para poder tomar su decisión de compra, cuando  $t = 0$ .

## RIQUEZA INICIAL Y TERMINAL

La consecuencia de tener estos dos objetivos en conflicto es que usted como inversionista debe **diversificar**, comprando no sólo un valor sino varios, lo que explica el “Método Analítico de Inversión” que inicia definiendo la riqueza o patrimonio inicial y el terminal.

(1) **Rendimiento de un periodo de tenencia de un valor determinado.**

$$\text{Rendimiento} = \left( \frac{\text{Riqueza al final del período} - \text{Riqueza al inicio del período}}{\text{Riqueza al inicio del Período}} \right)$$

**Riqueza al inicio del periodo** = Precio de compra de una unidad del valor en  $t = 0$  (por ejemplo la compra de una acción común de una empresa).

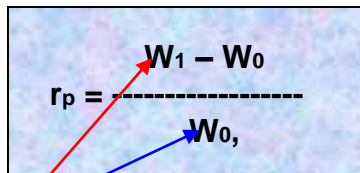
**Riqueza al final del periodo** = Valor de mercado de la acción o unidad  $t = 1$ , junto con el valor de cualquier dinero en efectivo pagado al dueño del valor entre  $t=0$  y  $t=1$ .

En este punto, se da por hecho que todos los flujos positivos efectivo, como los dividendos, serán pagados al final del período.

## DETERMINACIÓN DE LA TASA DE RENDIMIENTO DE LA CARTERA

Puede establecerse que una cartera es una **colección de valores**, su rendimiento  $r_p$ , puede ser calculada de manera similar:

(1)



Si despejamos a  $W_1$ , quedaría así:

(2)

$$W_1 = W_0 (1 + r_p)$$

Tasa de rendimiento

$W_0$  = Precio de compra agregado en  $t = 0$  de los valores contenidos en la cartera.

$W_1$  = Valor de mercado agregado de los valores en  $t = 1$ , así como el efectivo agregado recibido entre  $t=0$  y  $t=1$  por la tenencia de los valores. De nuevo, se da por hecho que todos los flujos positivos de efectivo asociados con la cartera, tienen lugar en  $t=0$  o bien el  $t=1$ .

Con base en la ecuación (2), el inicio del período o riqueza inicial,  $W_0$ , multiplicada por  $(1 + \text{tasa de rendimiento})$  de la cartera es igual al final del período o sea la riqueza terminal,  $W_1$ .

Habíamos establecido que usted como inversionista debe decidir qué cartera comprar en  $t=0$ . Al momento en que usted tome la decisión, no conoce cuál será el valor de  $R_1$ , de la mayoría de las carteras alternativas consideradas porque no sabe cuál será el rendimiento de la mayoría de las carteras.

El inversionista debe conocer el rendimiento asociado con cualquiera de estas carteras, lo que en estadística se llama variable aleatoria; estas variables de pueden describir por sus momentos, dos de los cuales son:

- Valor o Rendimiento Esperado (o media) y
- Desviación Estándar.

Se afirma que los inversionistas deben basar sus decisiones de cartera solamente en los **rendimientos esperados** y en las **desviaciones estándar**.

Es decir, el inversionista debe estimar el **rendimiento esperado** y la **desviación estándar de cada cartera** y luego *escoger la mejor* con base en las magnitudes relativas de estos dos parámetros.

- El rendimiento esperado puede verse como una **medida de la bonificación potencial** asociada con cualquier cartera y
- La desviación estándar puede verse como una **medida de riesgo** asociado con cualquier cartera. Una vez examinados los “riesgos” y “rendimientos potenciales” de cada cartera, el inversionista puede identificar la mejor cartera.

### Caso práctico:

Usted tiene que tomar una decisión, basado en dos tipos de carteras diferentes, “A” y “B”

La Cartera “A” tiene un rendimiento anual esperado del 8% y de la cartera “B” es del 12%. Supongamos que usted dispone de \$100,000.00 y considera un período de tenencia de 1 año. Los niveles esperados de riqueza terminal asociados con la Cartera “A”, es de 108,000.00 (100,000+8%) y de la cartera “B” de 112,000.00 (100,000+12%).

Usted supondría inicialmente que la cartera “B” es la más atractiva, ya que le da 4,000 más que la “A” sin embargo, las carteras “A” y “B” tienen una desviación estándar de 10% y 20% respectivamente, como se muestra en el siguiente cuadro, considerando que la riqueza inicial es de 100,000 y que las dos carteras tienen rendimientos distribuidos en forma normal.

Las Desviaciones Estándar de “A” y “B” son del 10% y 20% respectivamente, con un rendimiento esperado del 8% y del 12% respectivamente.

Resumiendo, tanto las utilidades o rendimientos esperados, como desviaciones estándar de las carteras “A” y “B” son como sigue:

“A” tiene un rendimiento esperado del 8%
“A” tiene una desviación estándar del 10%
“B” tiene un rendimiento esperado del 12%
“B” tiene una desviación estándar del 20%

### Comparación de los niveles de riqueza terminal de "A" y "B"

Nivel de riqueza terminal	% de probabilidad de estar por debajo de este nivel de valor final "A"	% de probabilidad de estar por debajo de este nivel de valor final "B"
70,000	0%	2%
80,000	0%	5%
90,000	4%	14%
100,000	21%	27%
110,000	57%	46%
120,000	88%	66%
130,000	99%	82%

Haga usted un análisis de probabilidades con la información proporcionada.

- Observamos que existe un 2% de probabilidades de que el inversionista tenga una riqueza terminal de 70,000 o menos si compra la Cartera "B". Por otra parte no hay probabilidades de que la riqueza terminal del inversionista sea menor que 70,000 si compra la Cartera "A".
- Del mismo modo, hay 5% de probabilidades de que la cartera "B" valga menos de 80,000, mientras que no hay posibilidades de que la cartera "A" valga menos de 80,000.
- Hay 14% de probabilidades de que "B" valga menos de 90,000, mientras que hay solo 4% de que la cartera "A" valga menos de esa cantidad.
- Prosiguiendo, la cartera "B" tiene 27% de posibilidades de valer menos de 100,000, mientras que la cartera "A" tiene solo 21% de probabilidad de valer menos.
- Puesto que usted como inversionista tiene un capital inicial de 100,000, según esta última observación, hay una posibilidad mayor de tener un rendimiento negativo si se compra la cartera "B" (27%) en lugar de la cartera "A" (21%).
- En resumen, se demuestra que la cartera "A" es la menos riesgosa comparada con "B", lo que significa que en este panorama, la cartera "A" sería más atractiva.
- Sin embargo, la última decisión de comprar la cartera "A" o la "B", **solo dependerá de usted**, en cuanto a si tiende a **aceptar más riesgo** y por lo tanto, **más rendimiento**.

Una de las funciones de los bancos y otras instituciones financieras, es la administración de Sociedades de Inversión de Deuda (Obligaciones). Puede decirse que es una forma costosa de atraer recursos adicionales, ya las acciones de estos fondos no tienen techos de tasas de interés.

Desde 1984, las autoridades mexicanas permitieron la creación de los fondos del mercado de dinero o sociedades de inversión de deuda, las cuales fueron diseñadas para personas físicas y morales, a las que actualmente se les ofrecen intereses atractivos y servicios de administración de efectivo.

Los fondos del mercado de dinero pueden invertirse, en México, en cualquier título del país que no sean acciones, pero deben contar con un mínimo del 30% invertido en valores gubernamentales. Además de los CETES, la mayoría de las sociedades invierte en Bondes, Ajustabonos, Papel Comercial, Aceptaciones bancarias y otros instrumentos financieros del mercado de dinero mexicano, los cuales rinden una tasa de interés un poco mayor que los CETES. Los extranjeros no pueden participar en SI de Deuda, pero si pueden hacerlo en S de I de Renta Variable, las cuales incluyen tanto acciones, como instrumentos del mercado de dinero mexicano.

Sea cual fuere la composición de las sociedades de inversión, éstas pueden contener distintas categorías de inversiones, o sea una combinación de instrumentos de deuda, combinación de acciones o una combinación de instrumentos de deuda y acciones.

Recapitulando, si utilizamos la Teoría Moderna de Portafolios MPT (*“Modern Portafolios Theory”*), los administradores de las Sociedades de Inversión miden el rendimiento de la cartera. El objetivo es el de **obtener la mejor combinación de rendimientos de diversas inversiones, para un nivel de riesgo determinado**. Su metodología se enfoca a la búsqueda de inversiones cuyos rendimientos esperados estén negativamente correlacionados.

Existen tres extremos de correlación entre dos inversiones, una de ellas **POSITIVA**, otra **NEGATIVA** y la última, la **NULA**.

a) La perfectamente **POSITIVA** (que se mide como uno), implica que su rendimiento sube en promedio en la misma proporción.

b) La correlación **NEGATIVA**, medida como menos uno, implica que el rendimiento de una inversión disminuye en promedio en la misma proporción en la que la otra sube.

c) La correlación **NULA** o **CERO**, implica que no haya ninguna forma de relacionar el rendimiento promedio de una inversión con el rendimiento promedio de la otra.

**Ejemplo:** Si una cartera estuviera compuesta al 50% (q) por CETES con rendimiento del 10% (RCT) y el otro 50% por Papel Comercial con rendimiento del 20%, su rendimiento esperado sería:

$$E(RC) = q(RCT) + (1 - q)RP$$

De donde:

E (RC) = Rendimiento esperado de la cartera  
 q = Proporción que le corresponde a cada instrumento, respecto del total.  
 RCT = Rendimiento del CETE  
 RP = Rendimiento del Papel Comercial

Determine usted el Rendimiento Esperado

$$E(RC) = 0.50(10) + 0.50(20)$$

$$E(RC) = 15\%$$

Este ejemplo nos muestra que la combinación de dos instrumentos en una cartera, ofrece una combinación de riesgo que logra un rendimiento del 15%

Otra forma de calcular el rendimiento de esta combinación, es reconociendo que si el CETE tiene una tasa sin riesgo del 10% y la diferencia entre su rendimiento y el del Papel Comercial se representa por una prima de riesgo, es decir, 10%, que multiplicada por la proporción de la cartera, sería:

$$E(RC) = 10 + 0.50(20-10) = 15\%$$

Calcular la combinación de rendimientos pudiera resultar simple, pero no lo es calcular la combinación de riesgos, ya que aquí debe medirse de antemano la Desviación Estándar (riesgo) de la inversión con riesgo y ser multiplicada por la proporción de ésta respecto del total.

De tal forma que, si la *Desviación Estándar* de la inversión riesgosa es del 40%, el resultado sería:

0.50 (40) = 20% de Desviación Estándar por toda la cartera, incluyendo el CETE, considerado como una inversión no riesgosa.

La combinación de instrumentos riesgosos y no riesgosos, origina entonces, combinaciones de riesgo y rendimientos particulares.

**A veces las combinaciones serán de beneficio para el inversionista y en otras serán en su perjuicio.**

**Si tomáramos como base el ejemplo anterior, el inversionista, a través de la combinación de las dos inversiones, pudo obtener un riesgo menor que solo invirtiendo en un solo instrumento.**

### **ESTUDIO DE LOS RIESGOS**

Por lo general es la dirección de administración de riesgos o bien consultores externos en esta especialidad, que se abocan al estudio administrativo y financiero que incluye la parte correspondiente entre otros, a los seguros, pero debido su importancia y a que su costo puede llegar a ser significativo, casi siempre es recomendable recurrir a un estudio independiente. En este estudio se muestra a los inversionistas que sus aportaciones serán cubiertas ante la exposición de fenómenos de la naturaleza como son terremotos, inundaciones, disturbios sociales o bien por los daños causados por eventos fortuitos o bien cuando se responsabiliza los dueños del proyecto por muerte accidental de personas. Este estudio nos muestra lo que tenemos que invertir para conseguir una protección integral de personas y bienes, además de que la confianza a las personas externas que financiarán total o parcialmente a la entidad.

En esta parte, deberá verificarse que no existe incompatibilidad entre cualquier parte del proyecto y de las leyes vigentes. También deberán conocerse los proyectos de cambio en diferentes ordenamientos legales, considerando nuevos impuestos, estructura de la escritura constitutiva, licencias, permisos, aspectos relacionados con salud, guarderías, condiciones físicas de los lugares de trabajo, conocimiento profundo de los tratados de libre comercio con los que la empresa tendrá que lidiar para efectos de importaciones y exportaciones, legislación mercantil, ley del mercado de valores si van a cotizar en el mercado accionario, entre un sinfín de aspectos adicionales. Como puede observarse los profesionistas indicados para llevar a cabo este estudio son abogados, contadores y especialistas en comercio exterior.

### **VALUACIÓN DE LAS ACCIONES ORDINARIAS O COMUNES**

Para entender la importancia de este tema podemos decir que las acciones de Wal-Mart tuvieron acciones que al cierre cotizaban a 68.0625 dólares por acción. El mismo día General Motors Corporation cerró a 67.0000 dólares por acción, mientras que computadoras Dell Computer cerró a 65.3750 por acción.

Como las cotizaciones de las 3 empresas eran tan similares, usted podría pensar que debido a las cotizaciones publicadas, los dividendos también serían similares.

¿Qué opina usted?



Sería un grave error pensar de esta manera.

GMC pagó 2 dólares de dividendos por acción, Wal-Mart 0.31 cts por acción y Dell "0" dls por acción.

Entonces ¿**Qué debemos considerar cuando tratamos de valorar las acciones comunes?**

Pues los dividendos son una de las variables importantes a considerar cuando tratamos de valorar las acciones comunes. Por lo tanto veremos el comportamiento de los dividendos, los valores de las acciones y la conexión que existe entre ambos.

### FLUJOS DE EFECTIVO

Pensemos que usted está considerando la posibilidad de comprar hoy ciertas acciones de capital y venderlas en un año. Las acciones en comentario tienen un valor de 70 dólares. Usted predice que cada acción pagará un dividendo de 10 dólares hacia el final del año.

Si usted requiere un rendimiento del 25% sobre su inversión ¿**Cuál es la máxima cantidad que pagaría por cada acción?** Dicho de otra manera ¿**Cuál es el valor presente del dividendo de 10 dólares junto con el valor final de 70 dólares a 25 de rendimiento requerido?**

Si usted compra las acciones hoy cada una a 70 dólares, al final del año tendrá  $70 + 10 = 80$  en efectivo

(Valor Base) / (1+% rend. Req.)

Entonces el Valor Presente =  $(10+70)/(1+0.25)= 64$  dls

Por lo tanto, el valor que usted debe asignarle hoy a las acciones es precisamente de 64 dólares que acaba de calcular a Valor Presente.

Si  $P_0$  = precio actual de la acción y  $P_1$  = precio correspondiente a un período.

Si  $D_1$  es el dividendo en efectivo pagado al final del período, por tanto:

Si  $R$  = es el rendimiento requerido por el mercado sobre esta inversión

Entonces:

$$P_0 = (D_1 + P_1) / (1 + R)$$

Si quisiéramos calcular el valor de una acción el día de hoy  $P_0$ , primero tendríamos que estimar el valor dentro de un año ( $P_1$ ), lo cuál es muy difícil y eso complica el planteamiento.

Entonces la pregunta es ¿**Cuál será el precio dentro un período  $P_1$ ?** La respuesta es que no lo sabemos. Pero piense por un momento que de alguna forma si conocemos el precio que registrará en dos períodos  $P_2$ . Si tenemos un dividendo pronosticado en 2 años  $D_2$ , el precio de las acciones de un período sería:

$$P_0 = (D_2 + P_2) / (1 + R)$$

Si sustituimos esta expresión por  $P_1$  en nuestra expresión  $P_0$ , obtenemos:

$$P_0 = \frac{D_1 + P_1}{1 + R} = \frac{D_1 + \left( \frac{D_2 + P_2}{1 + R} \right)}{1 + R}$$

$$= \frac{D_1}{(1 + R)^1} + \frac{D_2}{(1 + R)^2} + \frac{P_2}{(1 + R)^2}$$

Si necesitáramos obtener un precio en dos períodos, tampoco lo sabemos, por lo que podríamos diferir otro período más y asentar:

$$P_2 = (D_3 + P_3) / (1 + R)$$

Si sustituimos en  $P_2$ , tenemos:

$$P_0 = \frac{D_1}{(1 + R)^1} + \frac{D_2}{(1 + R)^2} + \frac{P_2}{(1 + R)^2}$$

$$P_0 = \frac{D_1}{(1 + R)^1} + \frac{D_2}{(1 + R)^2} + \frac{\left( \frac{D_3 + P_3}{1 + R} \right)}{(1 + R)^2}$$

$$P_0 = \frac{D_1}{(1 + R)^1} + \frac{D_2}{(1 + R)^2} + \frac{D_3}{(1 + R)^3} + \frac{P_3}{(1 + R)^3}$$

Como usted ya habrá intuido, la cadena sería interminable o infinito.

Cualquiera que sea el precio de las acciones, el Valor Presente será esencialmente igual a "0" si establecemos la fecha de venta de las acciones en un futuro lo suficientemente lejano.

Lo que si podemos deducir es que el **precio actual** de las acciones se puede escribir como el Valor Presente de los dividendos que **empiezan a generarse dentro de un periodo y que continúan para siempre.**

La conclusión de anterior, es que el **precio actual de las acciones es igual al valor presente de todos los dividendos futuros**. ¿Cuántos dividendos futuros hay? En principio podemos decir que es infinito, lo que quiere decir que aún podemos calcular el valor de las acciones: **tendríamos entonces que pronosticar un número infinito de dividendos y posteriormente, descontarlos todos**.

Las empresas, como por ejemplo Yahoo, no pagan dividendos actualmente. Por otra parte las empresas pequeñas en crecimiento reinvierten todas sus utilidades y por ello usted podría concluir que ¿dichas acciones no valen nada?

La respuesta depende de varios factores:

Cuando establecemos que **el valor de las acciones es igual al valor presente de los dividendos futuros**, no se descarta la posibilidad de que un cierto número de esos dividendos sean iguales a "0". Sin embargo **no** todos ellos pueden ser "0".

Si pensáramos hipotéticamente que: 1) una empresa en su escritura constitutiva estableciera la prohibición de pagar dividendos ahora y en el futuro. 2) La empresa nunca solicita financiamientos, 3) No le paga a los dueños de ninguna forma y 4) Nunca vende ningún activo, entonces 5) la SHCP tampoco recibiría nada de impuestos.

Entonces ¿Cuánto valen las acciones de esta empresa?

No valdrían nada, ya que estaría sumergida en un "hoyo negro" de tipo financiero. El dinero entra, pero nada de valor sale.

Este ejemplo absurdo ejemplifica que cuando hablamos de empresas que no pagan dividendos, lo que realmente queremos decir es que decimos es que actualmente no pagan dividendos.

Existen circunstancias bajo las cuales podemos estimar el valor de una acción. Para ello debemos hacer algunos supuestos sobre el patrón de comportamiento de los dividendos futuros, como sigue:

- 1) El dividendo tiene una tasa de crecimiento "0"
- 2) El dividendo aumenta a una tasa constante
- 3) El dividendo crece a una tasa constante pero después de algún tiempo.

#### Dividendo con crecimiento "0"

Esto quiere decir que  $D_1=D_2=D_3 = D = \text{Constante}$ , por lo tanto el valor de la acción será:

$$P_0 = \frac{D_1}{(1+R)^1} + \frac{D_2}{(1+R)^2} + \frac{D_3}{(1+R)^3} + \frac{D_4}{(1+R)^4} + \dots + \frac{D_n}{(1+R)^n}$$

Si esto es cierto, el dividendo que siempre es el mismo, la acción automáticamente se convierte en lo que se le conoce en el medio financiero como una Perpetuidad Ordinaria, donde el flujo de efectivo es igual a D en cada período.

Por lo tanto el valor por acción está dado por:

$$P_0 = D/R \quad \text{donde } R = \text{Rendimiento requerido}$$

Si una empresa tiene la política de pagar dividendos de 10 dólares por acción cada año y si esa política se mantiene indefinidamente ¿Cuál sería el valor de una acción si el rendimiento requerido fuera del 20%?

Por tanto la acción equivale a una perpetuidad ordinaria y por tanto el valor de la acción es de  $10/0.20 = 50$  dólares por acción

### Crecimiento constante

Si suponemos que un dividendo de una empresa crece a una tasa constante a la cual simbolizaremos con "g". Si aceptamos que  $D_0$  sea el dividendo que se acaba de pagar, el siguiente dividendo  $D_1$ , será:

$$D_1 = D_0 \times (1+g) \quad \text{para un período}$$

Para dos períodos sería;

$$D_2 = D_1 \times (1+g)$$

$$= [D_0 \times (1+g)] \times (1+g), \text{ si se factoriza, tendríamos}$$

$$= D_0 \times (1+g)^2$$

Y así sucesivamente, entonces podríamos generalizar que el crecimiento compuesto, es estableciendo financieramente que el dividendo correspondiente a "t" períodos hacia el futuro  $D_t$ , está dado por:

$$D_t = D_0 \times (1+g)^t$$

Un activo con flujos de efectivo que crecen a una tasa constante para siempre, recibe el nombre de "**perpetuidad creciente**" y hay una expresión matemática para determinar el valor de este activo.

Usted podría pensar que ésto no es posible, sin embargo es más común de lo que uno pueda creer.

Por ejemplo Procter & Gamble incrementó en 12.2% sus dividendos hasta alcanzar un valor de 1.01 por acción. Este incremento fue sorprendente porque era el incremento número 42 en forma sucesiva.

### Crecimiento de Dividendos

Una empresa acaba de pagar un dividendo de 3 dls por acción y los dividendos de esta empresa crecen a una tasa constante del 8% al año.

Diga usted ¿Cuál sería el dividendo dentro de 5 años? O dicho de otra forma ¿Cuál es el monto futuro?

$$^5 \$3 \times 1.08 = \$3 \times 1.4693 = 4.40798423 \text{ dls}$$

Entonces usted ya puede concluir que el dividendo aumentará 1.41 dls a lo largo de los 5 años siguientes ( $4.41 - 3 = 1.41$ )

Si un dividendo crece a una tasa constante, habremos reemplazado el problema de pronosticar un número infinito de dividendos futuros por el de estimar una sola tasa de crecimiento, o sea, simplificamos el problema. En este caso, si permitimos que  $D_0$  represente al dividendo que se acaba de pagar y si permitimos que " $g$ " sea la tasa de crecimiento constante, el valor de las acciones de capital se representaría matemáticamente así:

$$P_0 = \frac{D_1}{(1+R)} + \frac{D_2}{(1+R)^2} + \frac{D_3}{(1+R)^3} + \frac{D_4}{(1+R)^4} + \dots + \frac{D_n}{(1+R)^n}$$

$$P_0 = \frac{D_0(1+g)}{(1+R)} + \frac{D_0(1+g)^2}{(1+R)^2} + \frac{D_0(1+g)^3}{(1+R)^3} + \dots + \frac{D_0(1+g)^n}{(1+R)^n}$$

En tanto la tasa de crecimiento  $g$  sea inferior a la tasa de descuento  $r$ , el valor presente de esta serie de flujos de efectivo se puede escribir como sigue:

### MODELO DE CRECIMIENTO DE DIVIDENDOS

$$P_0 = \frac{D_0 \times (1+g)}{(R - g)} = \frac{D_1}{(R - g)}$$

A esta fórmula la llamaremos **Modelo de Crecimiento de Dividendos**

Suponga de  $D_0 = \$2.30$  dls  $R = 13\%$  y  $g = 5\%$  ¿Cuál sería el precio de la acción?

$$P_0 = D_0 \times (1+g)/(R-g)$$

$$P_0 = 2.30 \times 1.05/(0.13-0.05)$$

$$P_0 = 2,415/0.08$$

$$P_0 = 30.19$$

De hecho podemos utilizar el modelo de crecimiento de dividendo para obtener el precio de una acción en cualquier momento, no solo el día de hoy. En general, el precio de la acción en el momento "t" es de:

$$P_0 = \frac{D_t \times (1+g)}{(R-g)} = \frac{D_{t+1}}{(R-g)}$$

Suponga usted que estamos interesados en conocer el precio de la acción después de 5 años  $P_5$ .

En primer lugar necesitamos calcular el dividendo en el momento 5,  $D_5$ . Toda vez que el dividendo que se acaba de pagar es de 2.30 y ya que la tasa de crecimiento es del 5% anual,  $D_5$  será de:

$$D_5 = 2.30 \times 1.05^5 = 2.30 \times 1.2763 = 2.93544759$$

Ahora bien, con base en el modelo de crecimiento de dividendos, podemos obtener el precio de la acción dentro de 5 años:

$$P_0 = \frac{D_t \times (1+g)}{(R-g)} = \frac{(2.935 \times 1.05)}{(0.13 - 0.05)} = \frac{3.0822}{0.08} = 38.53$$

### CRECIMIENTO DE DIVIDENDOS (Acciones en crecimiento)

El próximo dividendo de la empresa Shalom Armenta SA de CV "SA" será de 4 dlls por acción. Los inversionistas requieren de un rendimiento del 16%.

La empresa SA se ha caracterizado por aumentar un 6% cada año. Si usted se basa en el Modelo de Crecimiento de Dividendos, diga usted ¿Cuál será el valor actual de las acciones de SA? ¿Cuál será el valor dentro de 4 años?

Después de haber estudiado el crecimiento de las acciones a través de los dividendos, realmente el problema en este ejercicio es que el próximo dividendo,  $D_1$ , será de 4 dlls, por lo que no se puede multiplicarse por  $(1+g)$ .

**Procedimiento de resolución:****Primer Paso:** Encontrar el valor de  $P_0$  (Precio de la Acción)

Con las condiciones anteriores, el precio por acción sería:

$$P_0 = D_1 / (r - g)$$

$$P_0 = 4 / (16\% - 6\%)$$

$$P_0 = 40 \text{ dólares}$$

si sustituimos valores en esta fórmula, tendremos:

**Segundo Paso:** Una vez conocido el valor del dividendo que será pagado dentro de un año, sabremos que el dividendo que se pagará dentro de 4 años, será. (Si ya calculamos lo del primer año, ahora solo resta calcular lo de los 3 años siguientes):

$$D_1 \times (1+g)^3$$

Si sustituimos valores tendremos:

$$4 \times 1.06^3 = 4.764064$$

**Tercer Paso:** Debemos calcular el precio dentro de 4 años:

$$P_4 = D_4 \times (1+g) / (R-g)$$

$$P_4 = 4.764064 \times 1.06 / (0.16 - 0.06)$$

$$P_4 = 50.4990784 \text{ dólares por acción}$$

**Conclusiones:**Observe usted que en este ejemplo que  $P_4$  es igual a  $P_0 \times (1+g)^4$ 

$$P_4 = 50.50 = 40 \times (1.06)^4 = P_0 \times (1+g)^4$$

¿Por qué es así? Para comprender la razón de ésto, observe que:

$$P_4 = D_5 / (R-g)$$

Sin embargo,  $D_5$  es igual a  $D_1 \times (1+g)^4$ , por que podemos escribir  $P_4$  como:

$$P_4 = D_1 \times (1+g)^4 / (R-g), \text{ si reacomodamos la fórmula:}$$

$$P_4 = [D_1 / (R-g)] \times (1+g)^4$$

$$P_4 = P_0 \times (1+g)^4$$

Este ejemplo le ha permitido entender que el modelo de crecimiento de dividendos supone, implícitamente, que: **El precio de las acciones crecerá a la misma tasa constante que los dividendos**, lo cual, realmente no nos debiera sorprender. Ello nos indica que **si los flujos de efectivo sobre una inversión crecen a una tasa constante o a través del tiempo, lo mismo sucederá por consecuencia con el valor de esa inversión.**

Otra pregunta que usted podría hacerse es que pasaría con este modelo, si la tasa de crecimiento “g” fuera mayor que la tasa de descuento “R”.

En principio, el precio de las acciones sería negativo porque “R-g” sería inferior a “0”, lo cual no sucedería, ya que si la tasa de crecimiento constante supera a la tasa de descuento, el precio de las acciones sería infinitamente grande, ya que si la tasa de crecimiento fuera mayor que la tasa de descuento, el valor presente de los dividendos, seguiría incrementándose.

Este razonamiento será también verdad cuando la tasa de crecimiento y la de descuento sean iguales. En ambos casos, la simplificación que nos permite reemplazar la corriente infinita de dividendos, por el modelo de crecimiento de dividendos es ilegal, por lo que las respuestas obtenidas a partir de ellos no tienen sentido alguno, a menos de que la tasa de crecimiento sea inferior la tasa de descuento.

Para finalizar, la expresión que utilizamos para el caso de un crecimiento constante funcionará también para cualquier perpetuidad en crecimiento, no solo para los dividendos sobre las acciones comunes. Si  $A_1$  es el siguiente flujo de efectivo sobre una perpetuidad en crecimiento, el valor presente de los flujos de efectivo estará dado por:

**Valor Presente =  $A_1/(R-g) = A_0(1+g)/(R-g)$**  Observe que en esta expresión se ve igual al resultado correspondiente a cualquier perpetuidad ordinaria, excepto que tenemos “R-g” en la línea inferior en lugar de sólo tener R.

### **Crecimiento No Constante**

Este es el último caso de los 3 enunciados en la sesión anterior, que consideraremos sobre el crecimiento de las acciones de una empresa, medido a través de sus dividendos.

Se estudia para poder dar acceso a las tasas de crecimiento extremadamente anormales a lo largo de un lapso finito.

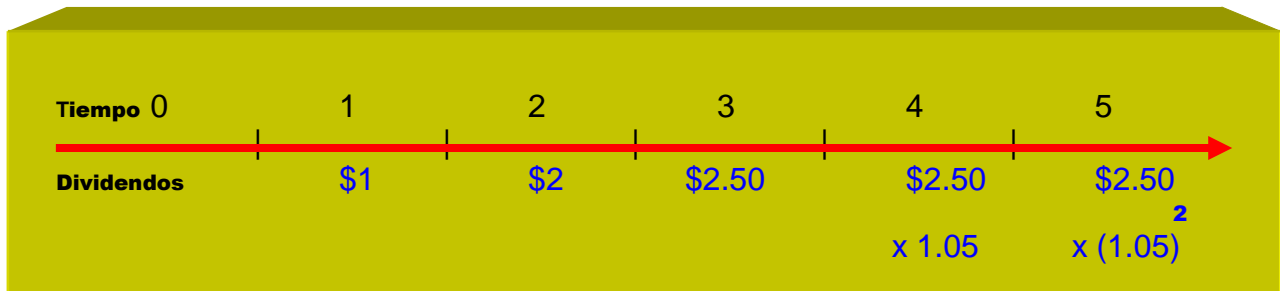
Como ya vimos, la tasa de crecimiento no puede superar el rendimiento requerido indefinidamente, pero podría serlo durante un cierto número de años. Para evitar el problema de tener que pronosticar que descontar un número infinito de dividendos, requeriremos que estos empiecen a crecer a una tasa constante en algún momento en el futuro.



Con objeto de ejemplificar el caso de un crecimiento no constante, considere usted el caso de una empresa que actualmente no para dividendos. Sin embargo, usted pronostica que dentro de cinco años si va a pagar un dividendos de 50 centavos de dólar por acción. Usted espera que este dividendo crezca posteriormente a una tasa del 10% anual indefinidamente. El rendimiento requerido en empresas como ésta en el mercado financiero desde el 20%. Determine usted ¿Cuál será el precio de la acción el día de hoy?

Para investigar cuál es el valor actual de las acciones, en primer lugar debemos determinar cuánto valdrán estas acciones una vez que se paguen los dividendos. De este modo, podemos calcular el valor presente de ese precio futuro para obtener ese precio actual. El primer dividendo que se pagará dentro de cinco años, crecerá de manera uniforme a partir de esa fecha. Con base en el modelo de crecimiento de dividendos, podemos afirmar que dentro de cuatro años el precio será de:

$$\begin{aligned}
 P_4 &= D_4 \times (1+g)/(R-g) \\
 &= D_5/(R-g) \\
 &= 0.50/(0.20 - 0.10) \\
 &= 5 \text{ dólares}
 \end{aligned}$$



Si las acciones llegan a tener un valor de cinco dólares dentro de cuatro años, podemos obtener el valor actual descontando este precio durante cuatro años a una tasa del 20%.

$$P_0 = \$5/(1.20)^4 = \$5/2.0736 = 2.41 \text{ Dólares}$$

Por lo tanto, las acciones tienen un valor actual de 2.41 dólares

El problema referente a un crecimiento no constante, se vuelve más complicado si los dividendos no son de cero durante los primeros años. Por ejemplo suponga que usted ha establecido los siguientes pronósticos de dividendos para los tres años siguientes:

Año	Dividendo Esperado
1	1.00
2	2.00
3	2,50

Después de tercer año, el dividendo crecerá una tasa constante del 5% anual. El rendimiento requerido será del 10%. Diga usted ¿Cuál será el valor actual de las acciones?

Al calcular un crecimiento no constante, podemos ayudarnos con una línea de tiempo. El aspecto de mayor importancia es el momento en el que empieza el crecimiento constante. En este problema particular, el crecimiento constante empieza en el momento **3** a partir de 2.50 lo cual significa que podemos usar este modelo para determinar precio de las acciones en el momento **3**,  $P_3$ . Por lo general, el error más común que se comete en esta situación es identificar incorrectamente el inicio de la fase de crecimiento constante, y como resultado de este error se calcula precio futuro de la acción en el momento incorrecto.

Como siempre, el valor de la acción, es el valor presente de todos los dividendos futuros. Para calcularlo, primero tenemos que calcular el valor presente del precio de las acciones durante tres años, tal como ya lo hicimos anteriormente. Después, tenemos que añadir el valor presente de los dividendos que se pagarán entre el día de hoy y esa fecha, por lo tanto, dentro de tres años el precio será de:

$$\begin{aligned}
 P_3 &= D_3 \times (1+g)/(R-g) \\
 &= 2.50 \times 1.05 / (0.10 - 0.05) \\
 &= 52.50 \text{ dólares}
 \end{aligned}$$

Después de este cálculo, podemos calcular el valor total de las acciones como el valor presente de los tres primeros dividendos, más el valor presente del precio en el momento 3,  $P_3$ :

$$P_0 = \frac{D_1}{(1+R)^1} + \frac{D_2}{(1+R)^2} + \frac{D_3}{(1+R)^3} + \frac{P_3}{(1+R)^3}$$

$$P_0 = \frac{\$1}{1} + \frac{\$2}{(1.10)^2} + \frac{\$3}{(1.10)^3} + \frac{\$52.50}{(1.10)^3}$$

Sustituyendo valores

$$P_0 = 0.91 + 1.65 + 1.88 + 39.44$$

$$P_0 = 43.88$$

Por lo tanto, el valor actual de las acciones será de 43.88 dólares

### Crecimiento Superior al normal.

La empresa GO ha crecido a la extraordinaria tasa del 30% por año, debido a su rápida expansión y a sus ventas altamente explosivas. Usted considera que la tasa mencionada se mantendrá durante tres años más, y que posteriormente disminuirá al 10% anual. Si después de esa fecha la tasa de crecimiento permanece indefinidamente en un 10% ¿Cuál será el valor total de las acciones?

Este es un caso de una empresa de un crecimiento superior al normal. Es improbable que una tasa de crecimiento del 30% se pueda sostener a lo largo de cualquier periodo considerablemente prolongado. Para poder evaluar el capital de esta compañía, en primer lugar, debemos calcular los dividendos totales a lo largo del periodo de crecimiento superior al normal.

Año	% Crec.	Dividendos Totales (000,000's)
1	5.00 x 1.3 =	6,500
2	6.50 x 1.3 =	8,450
3	2,50 x 1.3 =	10,985

El precio correspondiente al momento 3 se puede calcular como:

$$P_3 = D_3 \times (1+g)/(R-g)$$

donde g es la tasa de crecimiento a largo plazo, por lo tanto, sustituimos los valores dados:

$$P_3 = 10,985 \times 1.10 / (0.20 - 0.10)$$

$$P_3 = 120.835 \text{ dólares}$$

Para poder determinar el valor actual, necesitamos el valor presente de esta cantidad más el valor presente de los dividendos totales:

$$P_0 = \frac{D_1}{(1+R)^1} + \frac{D_2}{(1+R)^2} + \frac{D_3}{(1+R)^3} + \frac{P_3}{(1+R)^3}$$

$$P_0 = \frac{6.50}{(1.20)^1} + \frac{8.45}{(1.20)^2} + \frac{10.985}{(1.20)^3} + \frac{120.835}{(1.20)^3}$$

$$P_0 = \$5.42 + 5.87 + 6.36 + 69.93$$

$$P_0 = 87.58 \text{ dlls}$$

Por lo tanto el valor total de las acciones al día de hoy es de 87.58 millones de dólares. Si por ejemplo, hubieran 20 millones de acciones, diga usted cuál sería el precio de venta por cada acción.

$$87.58/20 = 4.38 \text{ dólares por acción}$$

### Componentes del Rendimiento Requerido

Hasta este momento, hemos tomado rendimiento requerido, o bien la tasa de descuento, así como un dato dado.

Por este momento nos interesa sólo examinar las implicaciones del modelo de crecimiento de dividendos para el rendimiento requerido. Anteriormente calculamos el valor de:

$$P_0 = D_1 / (R - g)$$

Recordemos que para encontrar el valor de R, se obtiene por:

$$(R - g) = (D_1 / P_0)$$

$$R = (D_1 / P_0) + g$$

Lo anterior nos dice que el rendimiento total "R" tiene dos componentes, por una parte  $(D_1 / P_0)$  que recibe el nombre de **rendimiento por dividendos**.

Toda vez que éste se calcula como el rendimiento en efectivo esperado, dividido entre el precio actual.

La segunda parte del rendimiento total es la tasa de rendimiento “g”. Conocemos que la tasa de crecimiento de los dividendos es también la tasa a la cual crece el precio de las acciones. De este modo, esta tasa puede interpretarse como el **rendimiento sobre ganancias de capital**, es decir, la tasa a la cual crece el valor de inversión. ¿Qué rendimiento ofrece esta acción si su pronóstico es correcto.

El modelo de crecimiento de dividendos calcular rendimiento total como:

R=Rendimiento en Dividendos + Rendimiento por ganancias de capital

$$R = (D_1/P_0) + g$$

Si cada acción se vende a un precio de 20 dólares y el dividendo crecerá el 10% anual, entonces:

$$R = \$1/20 + 10\%$$

$$R = 5\% + 10\%$$

$$R = 15\%$$

Por lo tanto se concluye que esta acción tendrá un rendimiento esperado del 15%.

Para comprobar que esta respuesta es correcta, si calculamos el precio dentro de un año P1, utilizando el 15% como rendimiento requerido, aplicamos el modelo de crecimiento de dividendos como sigue:

$$P_0 = D_1 / (R - g)$$

$$P_0 = \$1 \times 1.10 / (0.15 - 0.10)$$

$$P_0 = \$1.10 / 0.05$$

$$P_0 = 22 \text{ dólares}$$

Observe que estos 22 dólares provienen de  $20 \times 1.1$ , lo que indica el precio del acción ha crecido precisamente en el 10% (0.10), tal como debería haber sucedido. Si se pagan 20 dólares por acción el día de hoy, 70 dividendo de un dólar al final del año, lo que generará una ganancia de 2 dólares,  $(\$22 - 2)$ . El rendimiento por dividendos será, por lo tanto, de  $\$1/20 = 5\%$  El rendimiento por las ganancias de capital será de  $\$2/20 = 10\%$ , por tanto, el rendimiento total será de  $5\% + 10\% = 15\%$

Para formarnos un criterio acerca de las cifras reales, considere usted que de acuerdo con la encuesta que se hizo sobre los dividendos de Procter & Gamble, se concluyó que sus dividendos crecerían al 12% a lo largo de los cinco años siguientes o un plazo similar, comparado con una tasa histórica de crecimiento de 12% a lo largo de los cinco años anteriores, y del 10.5% a lo largo de los 10 años precedentes. El dividendo proyectado para el año siguiente se estimó en 1.14 dólares. En ese momento el precio de las acciones eran de 77 dólares cada una. **¿Cuál será el rendimiento que requerían los inversionistas de dicha empresa?**

Si rendimiento por dividendos es del 1.48% de rendimiento por ganancias de capital es del 12%, por tanto el rendimiento requerido total será de 13.48%

Resumen de lo visto hasta este momento:

### I Caso General

$$P_0 = \frac{D_1}{(1+R)} + \frac{D_2}{(1+R)^2} + \frac{D_3}{(1+R)^3} + \frac{D_4}{(1+R)^4} + \dots + \frac{D_n}{(1+R)^n}$$

Donde R es el rendimiento requerido

### II Caso de Crecimiento Constante

$$P_0 = \frac{D_0 \times (1+g)}{(R-g)} = \frac{D_1}{(R-g)}$$

Este resultado recibe el nombre de modelo de crecimiento de dividendos

### III Caso de Crecimiento Superior al Normal

$$P_0 = \frac{D_1}{(1+R)} + \frac{D_2}{(1+R)^2} + \dots + \frac{D_t}{(1+R)^t} + \frac{P_t}{(1+R)^t}$$

Donde:

$$P_t = \frac{D_t \times (1+g)}{(R-g)}$$

#### IV Rendimiento Requerido

El rendimiento requerido, R, puede escribir si, la suma de los elementos:

$$R = (D_1/P_0) + g$$

Donde  $(D_1/P_0)$  es el rendimiento de dividendos y "g" es el rendimiento por ganancias de capital (lo cual es lo mismo en la tasa de crecimiento en dividendos para el caso de crecimiento uniforme).

#### Características de las acciones comunes versus las preferentes

Cuando hablamos de las características de las acciones comunes u ordinarias, centramos la atención a en el derecho que tienen los accionistas y en los pagos de dividendos.

El término acciones comunes u ordinarias significan diferentes cosas a diferentes personas pero por lo general, se aplica a las que no tienen una preferencia especial, ya sea con el pago de dividendos o bien en el concurso mercantil en caso de quiebra.

**Derechos de los accionistas.** La estructura conceptual de la corporación supone que los accionistas eligen a los directores, quienes a su vez contratan a los administradores. Por lo tanto, los accesos controlan a la empresa o al corporativo mediante facultades en su elección de directores y este derecho por lo general sólo no tienen los accionistas.

Los directores, generalmente son elegidos cada año en una junta anual, con la idea de que un acciones un voto, y nunca un accionista es un voto.

Existe lo que se llama votación acumulativa, para permitir la participación minoritaria. Para este tipo de votación debe determinarse el número total de votos que pueden utilizar cada accionista, y se calcular según el número de accionistas multiplicado por el número de directores que deben elegirse.

Talía tiene 20 acciones y Oscar tiene 80. Ambos desean ocupar el puesto de Director General de la Empresa. Sin embargo Talía no quiere a Oscar Supongamos que deben elegirse 4 directores.

Talía tendría  $20 \times 4 = 80$  y Oscar  $80 \times 4 = 320$  Si Talía se da a si misma sus votos, aseguraría la dirección, ya que Oscar no podría dividir 320 entre 4 (80), ya que no daría un voto de más que se necesitaría para ganar.

Supongamos que las acciones de una empresa se venden en 20 dólares cada una y se pueden ejercer por acumulación de votos. Actualmente existen 100,000 acciones en circulación. Si deben elegir a tres directores ¿cuánto costaría garantizarse a sí mismo un lugar en la junta directiva?

En términos generales, si se van a elegir  $N$  directores, el  $1/(N+1)\%$  de las acciones, más una acción, garantizarán el puesto.

En este caso el problema radica en saber cuántas acciones de capital se requerirán para obtener un lugar. La respuesta de 2,501, cuyo costo será  $2,501 \times 20 = 50,020$  dls. Los 2,501 son por que no hay forma en que los 7,499 (10,000-2,501) votos restantes puedan dividirse entre 3 personas para proporcionales a todas, más de 2501 votos. Si se supone que 2 personas reciben 2,502 votos. Una tercera persona puede recibir cuando mucho 10,000 (-)  $2,502(-) 2,502 = 2,495$  por lo cual el puesto será suyo.

Otra forma de votación es la directa, con la cual se congelaría a los accionistas minoritarios, razón por la cual en los Estados Unidos exigen la votación acumulativa.

Clases de acciones. Algunas empresas tienen más de una clase se les comunes y con frecuencia cada una de ellas cuenta con derechos de votación desiguales. Por ejemplo Ford Motor Co tiene acciones comunes de la clase B que no se negocian entre el público, de que son mantenidas por la empresa y otras además de fideicomisos de la familia Ford. Esta clase tiene 40% del poder de votación, a pesar de que representa menos del 10% de las acciones en circulación. Otro ejemplo sería, en un tiempo GM tenía acciones tipo GM Classic (Originales) y dos clases adicionales "E" y "H" las cuales se crearon para ayudar a pagar dos adquisiciones de gran tamaño, EDS y Huges Aircraft.

En la bolsa de valores de Nueva York, la NYSE no permite que las empresas en diversas clases de acciones comunes, públicamente negociables, con derechos de votación desiguales. Muchas empresas que no pertenecen a la NYSE tienen clases duales de acciones comunes. La razón fundamental para la creación de clases duales o múltiples de acciones está establecida con el control empresa. Si tales acciones existen, la administración puede obtener un capital contable emitiendo acciones sin derecho a voto, o bien con derechos limitados, hará así mantener el control empresa.

Además del derecho de votar por los directores, los accionistas comunes tienen otros derechos como:

- ✦ Participar proporcionalmente en los dividendos pagados
- ✦ Participar proporcionalmente los activos que quieren después de un concurso mercantil
- ✦ votar en asuntos de gran importancia como fusiones escisiones o en reuniones especiales
- ✦ tienen derecho de prioridad que significa que una compañía que desee vender acciones deberá ofrecerlas primero a los accionistas actuales, antes que el público tener



## Acciones Preferentes

Su diferencia con acciones comunes radica en que tienen preferencia sobre capital común en lo que toca al pago de dividendos y en la distribución de activos en casos de liquidación. La preferencia sólo significa que los tenedores de este tipo de acciones deberán recibir un dividendo antes que los tenedores de las acciones comunes tengan el derecho de recibir algo.

### REPASO DE CASOS PRÁCTICOS

#### Crecimiento de dividendos y evaluación de acciones.

La empresa Rosalba Basurto (RB) SA de CV acaba de pagar un dividendo en efectivo de dos dólares por acción. Los inversionistas requieren un rendimiento de 16% sobre inversiones tales como éstas. Si se espera que dividendo crezca una tasa constante de 8% anual ¿Cuál será el valor actual de las acciones? y ¿Cuál será el valor dentro de cinco años?

Respuesta: el último dividendo  $D_0$  fue de dos dólares. Se esperaba que dividendo que hiciera uniformemente una tasa del 8%. El rendimiento requerido de 16%. Por lo tanto el precio actual es como sigue:

$$P_0 = D_1 \times (1+g) / (R-g) = D_0 \times (1+g) / R-g$$

$$P_0 = 2 \times 1.08 / (0.16 - 0.08)$$

$$P_0 = 2.16 / 8$$

$P_0 = 27$  dólares es precio del acción actual.

Para calcular el precio del acción dentro de cinco años, calculando el dividendo que se repartirá en ese tiempo, se utiliza la formula del modelo de crecimiento.

$$D_5 = D_0 \times (1+g)^5$$

Si sustituimos valores tendremos:

$$D_5 = 2 \times (1.08)^5$$

$$D_5 = 2.9387$$

Por lo tanto, dentro de 5 años el precio será de:

$$P_5 = D_1 \times (1+g)^5 / (R-g)$$

$$P_5 = 2.9387 \times (1+0.08)^5 / (0.16 - 0.08)$$

$$P_5 = 3.1738 / 8$$

$$P_5 = 39.67 \text{ dólares}$$

Una vez que quedó entendido el modelo de dividendos, se establece que:

$$\begin{aligned}
 P_5 &= P_0 \times (1+g)^5 \\
 &= 27 \times (1.08)^5 \\
 &= 27 \times 1.4693 \\
 &= 39.87 \text{ dólares.}
 \end{aligned}$$

Nótese que ambos enfoques de cálculo reditarán el mismo precio dentro de 5 años.

### Crecimiento Superior al Normal

En este caso debemos calcular los dividendos durante el período de crecimiento rápido y el precio de las acciones dentro de 3 años. Los dividendos son:

Año	% Crec.	Dividendos Totales (000,000's)
1	2.00 x 1.20 =	2.400
2	2.40 x 1.20 =	2.880
3	2,88 x 1.20=	3.456

Después de 3 años, la tasa de crecimiento disminuye a un 8% indefinidamente. El precio P<sub>3</sub> en ese momento se calcula:

$$P_3 = D_3 \times (1+g)/(R-g)$$

donde g es la tasa de crecimiento a largo plazo, por lo tanto, sustituimos los valores dados:

$$P_3 = 3,456 \times 1.08/(0.16 - 0.08)$$

$$P_3 = 46.656$$

Para completar el Valor Presente de las acciones, debemos calcular el Valor Presente de los 3 dividendos y el precio futuro:

$$\begin{aligned}
 P_0 &= \frac{D_1}{(1+R)^1} + \frac{D_2}{(1+R)^2} + \dots + \frac{D_3}{(1+R)^3} + \frac{P_3}{(1+R)^3} \\
 &= \frac{2.40}{(1.16)^1} + \frac{2.88}{(1.16)^2} + \frac{3.456}{(1.16)^3} + \frac{46.656}{(1.16)^3} \\
 &= 2.07 + 2.14 + 2.21 + 29.89 \\
 &= 36.31 \text{ dólares}
 \end{aligned}$$

## CASO PRÁCTICO SOBRE LA ELABORACIÓN Y EVALUACIÓN DE UN PROYECTO DE INVERSIÓN

### CASO PRÁCTICO SOBRE LA ELABORACIÓN DE UN PROYECTO DE SERVICIOS DE CONSULTORÍA

#### PRIMER PASO: Establecimiento de las Variables del Proyecto a evaluar

	Núm. Ases. por mes	Costo Prom. por Ase	Total de Ingresos Proy. Mei	Proy. Anual de In
Duración del Proyecto				3 años
Hon por Asesoría	10	20,000.00	200,000.00	2,400,000.00
Aportación Inicial de Capital			200,000	
	<b>No. de Unidades</b>	<b>Costo Unitario</b>	<b>Total de Inversión</b>	
Inversión en Lap Tops con costo mensual de 80000	4	20,000.00	80,000.00	460,000.00
	<b>No. de Unidades</b>	<b>Costo Unitario</b>		
Se obtiene un financiamiento total por	10%	290,000		
Equipo de Transporte	2	190,000	380,000.00	Entre 4 años=25%
Inversiones en Investigación de Mercados como Costo Vta	12	38,400	460,800.00	
Renta Mensual Oficina	12	5,000	60,000.00	Edo de Result C.Vtas
Inversión en software	1	79,200	79,200.00	Entre 3 años = 139,200.00
Depreciación vehículos anual		4		años
Depreciación Computadoras y software anual		3		años
Costos Fijos Mensuales	12	100,000	1,200,000.00	
Gastos Financieros anuales por préstamo	10%	290,000	29,000.00	
Suponga Ud. que no hay variación de resultados en el 2009 y 2010				

#### SEGUNDO PASO: Proyectar un sencillo Estado de Posición Financiera o Balance General

Suponga usted que hace una aportación de Capital Inicial por 200,000  
 También necesitará un Capital de Trabajo (Activo Circulante) de arranque de 30,000  
 Determine usted su necesidad de financiamiento bancario y regístrelo en su Balance General

Activo		Pasivo	
<b>Circulante</b>	30,000	<b>Circulante</b>	290,000
<b>Fijo</b>	460,000	<b>Capital</b>	
		<b>Aportación Inicial</b>	200,000
<b>Total de Activo</b>	<u>490,000</u>	<b>Total de Pasivo y Capita</b>	<u>490,000</u>

**TERCER PASO: Proyectar un simple Estado de Resultados**

				2008	2009	2010
<b>Ingresos Proyectados</b>				2,400,000	2,400,000	2,400,000
<b>Costo de Ventas Proyectado</b>				600,000	600,000	600,000
<b>Costo de Ventas en Consultoría</b>						
Inversiones en Investigación				460,800.00		
Renta Mensual Ofna.				60,000		
Inversión en software				79,200.00		
<b>Utilidad Bruta Proyectada</b>				1,800,000	1,800,000	1,800,000
<b>Depreciación</b>				121,400	121,400	121,400
Software				79,200.00	3	26,400
Equipo de transporte				380,000.00	4	95,000
<b>Costos Fijos</b>				1,200,000	1,200,000	1,200,000
Utilidad de Operación				478,600	478,600	478,600
Gastos Financieros				29,000	29,000	29,000
<b>Utilidad ante de ISR</b>				449,600	449,600	449,600
Impuestos				28%	125,888	125,888
<b>Utilidad Neta</b>				323,712	323,712	323,712

**CUARTO PASO: Determinar el Flujo Neto de Efectivo**

<b>Utilidad Neta</b>			323,712	323,712	323,712
<b>FLUJO NETO DE EFECTIVO</b>					
<b>Más:</b>					
Gastos que no son salida de efectivo		Depreciación	121,400	121,400	121,400
<b>Presupuesto de Capital a 3 años de préstamo bancario</b>					
<b>Menos Flujo Negativo por Pago de Intereses bancarios</b>					
Años y monto total del préstamo	3	290,000	96,667	96,667	96,667
<b>Flujo Neto Positivo (Negativo) de Efectivo (FNE)</b>			348,445	348,445	348,445
			FNE1	FNE2	FNE3

**QUINTO PASO: Determinar los datos base para evaluar el proyecto**

<b>DATOS BASE PARA EVALUAR EL PROYECTO</b>			
<b>Inversión Original</b>	<b>Io</b>		200,000
<b>Flujo Neto de Efectiv</b>	<b>FNE1</b>		348,445
<b>Flujo Neto de Efectiv</b>	<b>FNE2</b>		348,445
<b>Flujo Neto de Efectiv</b>	<b>FNE3</b>		348,445
<b>200,000</b>	<b>348,445</b>	<b>348,445</b>	<b>348,445</b>
Io	FNE1	FNE2	FNE3

Ejemplo de conversión	8.695652174 8 años	0.695652174	12	8.347826088 8 meses (x)
		0.347826088	30	10.43478264 10 días

En nuestro ejemplo:	206.6321259	entre:	días	30	6.887737531 6 meses (l)
	0.887737531	por		30	26.63212593 27 días (x)
					ó lo que es = 206.632159
	0.63212593	por		24	15.17102232 15 horas
					1 día 7hrs labo

<b>MÉTODO TPR Tasa Promedio de Rendimiento</b>			
Fórmula	Sumatoria de FNE1,2,3 / 3 (media aritmética)	348,445	(1.7422 x 100)
	lo	200,000	<b>174.22%</b>

<b>MÉTODOS AVANZADOS DE CÁLCULO</b>			
<b>VALOR PRESENTE NETO</b>	VPN =	$lo + \frac{FNE_1}{(1+i)^1} + \frac{FNE_2}{(1+i)^2} + \frac{FNE_3}{(1+i)^3} + \dots + \frac{FNE_n}{(1+i)^n}$	
<b>i=</b> equivale a la inflación anual en este caso 2007 (redondeada)		4%	
<b>Tasa anual cobrada por el Banco al que se le solicitó el préstamo</b>		10%	
<b>Total de i</b>		<b>14%</b>	
	se sustituyen valores		
	VPN =	$-200,000 \left( \frac{348,445}{(1+14\%)^1} + \frac{348,445}{(1+14\%)^2} + \frac{348,445}{(1+14\%)^3} \right)$	
		$-200,000 \left( 305,654 + 268,117 + 235,190 \right)$	608,961
	VPN =	608,961	si es mayor o igual a cero se <b>acepta</b> el proyecto si es menor a cero se debe <b>rechazar</b> el proyecto

<b>MÉTODOS AVANZADOS DE CÁLCULO</b>			
<b>VALOR PRESENTE NETO</b>	VPN =	$-lo + \left( \frac{FNE_1}{(1+i)^1} + \frac{FNE_2}{(1+i)^2} + \frac{FNE_3}{(1+i)^3} + \dots + \frac{FNE_n}{(1+i)^n} \right)$	
<b>i=</b> equivale a la inflación anual en este caso 2007 (redondeada)		4%	
<b>Tasa anual cobrada por el Banco al que se le solicitó el préstamo</b>		10%	
<b>Total de i</b>		<b>14%</b>	
	se sustituyen valores		
	VPN =	$-200,000 \left( \frac{348,445}{(1+14\%)^1} + \frac{348,445}{(1+14\%)^2} + \frac{348,445}{(1+14\%)^3} \right)$	
		$-200,000 \left( 305,654 + 268,117 + 235,190 \right)$	608,961
	VPN =	608,961	si es mayor o igual a cero se <b>acepta</b> el proyecto si es menor a cero se debe <b>rechazar</b> el proyecto

Inversión Original <i>lo</i>					<b>-200,000</b>
Tasa Anual Inflación+in	4%	10%			14%
Flujo Neto de Efectivo FNE			FNE 1		348,445
			FNE 2		348,445
			FNE 3		348,445
			FNE1	FNE2	FNE3
VPN =			348,445	348,445	348,445
			1.1400	1.0196	1.0027
			305,653.51	341,746.76	347,491.48
Potencia	%	% a la potencia	Unidad		
1	0.14	0.140000	1		1.1400
2	0.14	0.019600	1		1.2996
3	0.14	0.002744	1		1.4815
<b>TIR POR INTERPOLACIÓN</b>					
La suma de los flujos de efectivo FNE1+FNE2+FNE3+...+FNE <sub>n</sub> =0			348,445	348,445	348,445
			1.1400	1.2996	1.4815
			305,653.51	268,117.11	235,190.45
Inversión Original <i>lo</i>					808,961.07
Si VPN es mayor o igual a 0 se acepta el proyecto, pero si VPN es menor a 0 se rechaza					<b>-200,000</b>
					<b>608,961.07</b>

Una vez obtenido el VPN se procederá al cálculo de la TIR por el método de interpolación.

Lo anterior significa que VPN deberá estar lo más próximo a "0" para lo cual se escogerán al azar varios % que nos acerquen a esta norma financiera.

Regla: A mayor tasa de interés el VPN siempre será menor, y  
A menor tasa de interés el VPN siempre será mayor.

Con el objeto de ir calculando por aproximación el porcentaje ligeramente superior a "0" y el ligeramente inferior a "0" calcule usted el VPN con 20%, 40%, 162% y 164%

20% VNA ó VPN	\$733,992.94
	-200000.00
	<b>\$533,992.94</b>

40%	\$553,651.68
	-200000.00
	<b>\$353,651.68</b>

163%	\$202,018.82
	-200000.00
	<b>\$2,018.82</b>

165%	\$199,830.96
	-200000.00
	<b>-\$169.04</b>

Estimación al azahar de los porcentajes	Interpolación por estimación de %	VPN	Menos: Inversión Original	Valor Presente
Escogemos cualquier %	20%	\$733,992.94	-200,000	\$533,992.94
Escogemos cualquier %	40%	\$553,651.68	-200,000	\$353,651.68
Aquí ya se convierte en negativo	165%	\$199,830.96	-200,000	<b>-\$169.04</b> (1)
Aquí ya se convierte en positivo	163%	\$202,018.82	-200,000	\$2,018.82 (2)
Entonces significa que el % que buscamos está entre			165%	163%

La interpolación financiera nos indica que la TIR que estamos buscando está comprendida entre el 165% y el 163%, ya que son los valores positivo y negativo respectivamente que más se acercan a "0".

Ahora hagamos la comprobación de lo anterior:

En este momento se tomarán los valores absolutos, es decir, para estos efectos todos valores son positivos, solamente como números, sin considerar si son \$ o no.

<b>Primer Paso</b>			
165%	VPN	169.03819932	(1)
163%	VPN	2,018.81524323	(2)
<b>2 SUMATORIA</b>		<b>2,187.85344255</b>	

<b>Segundo Paso</b>	
Conocemos que la diferencia en valores absolutos entre 165% y 163% son	2
Conocemos que la suma de los Valores Presentes Netos totalizan	2,187.85344255

<b>Tercer Paso</b>		
Ahora se procede a dividir ambos resultados:	$\frac{2}{2,187.85344255}$	0.000914138 (3)

<b>Tercer Paso</b>		
Ahora se procede a dividir ambos resultados:	$\frac{2}{2,187.85344255}$	0.000914138 (3)

<b>Cuarto Paso</b>		
Se calcula la TIR del VPN correspondiente a	165%	
Se multiplica el cociente (3) por la cifra negativa		<b>-169.04</b>
Por: Cociente determinado		0.000914138
Producto		<b>-0.15452424%</b>
Más: Porcentaje estimado que dio origen al		165.00%
<b>TASA INTERNA DE RETORNO (TIR)</b>		<b>164.84548% (A)</b>

<b>Quinto Paso</b>	
<b>Se calcula la TIR del VPN correspondiente a</b>	163%
Se multiplica el cociente (3) por la cifra positiva	2,018.815243229
Por: Cociente determinado	0.0009141380
Producto	1.84547576%
Más: Porcentaje estimado que dio origen al	163.00000000%
<b>TASA INTERNA DE RETORNO (TIR)</b>	<b>164.84548%</b> (B)
Tanto el cálculo de cuarto y quinto paso comprueban que	
TIR corresponde exactamente a	164.84548%

Hasta el cálculo anterior hemos comprobado que el cálculo es correcto, sin embargo se recomienda confirmar dicho resultado:

Ahora bien, la forma rápida de calcular la TIR en excel o en calculadora financiera es:	
<b>Inversión Original</b>	<b>-200,000</b>
<b>FNE1</b>	<b>348,445</b>
<b>FNE2</b>	<b>348,445</b>
<b>FNE3</b>	<b>348,445</b>
<b>FUNCIÓN TIR calculada con Excel que es menos exacta</b>	<b>164.84%</b>

Por tanto, la forma adecuada de calcular la TIR es por interpolación y posteriormente deberá calcularse en forma rápida.

**Las conclusiones de este ejercicio, en la evaluación simple de un proyecto de inversión, con diferentes ponderaciones financieras son:**

- ☀ **El tiempo de recuperación de la inversión es de 6 meses 27 días; o bien, 206 días y 15 horas.**
- ☀ **La tasa promedio de rendimiento de la inversión TPR es del 174.22%**
- ☀ **El Valor Presente Neto corresponde a \$608,961**
- ☀ **La Tasa Interna de Retorno calculada por el Método de interpolación corresponde al 164.84548%**



A manera de refuerzo de estudio, con los datos que se proporcionan a continuación, calcule usted la TIR empleando el método de interpolación y su respectiva comprobación.

### Ejercicio 2

$I_0 = 600,000$   
 $FNE_1 = 200,000$   
 $FNE_2 = 200,000$   
 $FNE_3 = 300,000$   
 $FNE_4 = 400,000$   
 Inflación 16%

#### CASO 2

Estimación al azar de los porcentajes	Interpolación por estimación de %	VPN	Menos: Inversión Original	Valor Presente	
Escogemos cualquier %	25%	\$618,240.00	-600,000	\$18,240.00	(1)
Escogemos cualquier %	27%	\$594,098.19	-600,000	-\$5,901.81	(2)
Entonces significa que el % que buscamos está entre			25%	27%	

#### Valor Presente Neto con 16%

-600,000	200,000	220,000	300,000	400,000
	1.16	1.3456	1.560896	1.81063936

-600,000.00	172,413.79	163,495.84	192,197.30	220,916.44	149,023.37
-------------	------------	------------	------------	------------	------------

Ahora hagamos la comprobación de lo anterior:

En este momento se tomarán los valores absolutos, es decir, para estos efectos todos los valores son positivos, solamente como números, sin considerar si son \$ o no.

Primer Paso			
27%	VPN	18,240.00000000	(1)
25%	VPN	5,901.81136962	(2)
2 SUMATORIA		24,141.81136962	

Segundo Paso	
Conocemos que la diferencia en valores absolutos entre 25% y 27% son	2
Conocemos que la suma de los Valores Presentes Netos totalizan	24,141.81136962

Tercer Paso	
Ahora se procede a dividir ambos resultados:	$\frac{2}{24,141.81136962}$ 8.28438E-05 (3)

<b>Cuarto Paso</b>	
<b>Se calcula la TIR del VPN correspondiente a</b>	27%
Se multiplilca el cociente (3) por la cifra negativa	-5,901.81
Por: Cociente determinado	0.0000828438
Producto	-0.48892862920%
Más: Porcentaje estimado que dio origen al	27.00%
<b>TASA INTERNA DE RETORNO (TIR)</b>	<b>26.511% (A)</b>

<b>Quinto Paso</b>	
<b>Se calcula la TIR del VPN correspondiente a</b>	25%
Se multiplilca el cociente (3) por la cifra positiva	5,901.811369622
Por: Cociente determinado	0.0000828438
Producto	0.48892863%
Más: Porcentaje estimado que dio origen al	25.00000000%
<b>TASA INTERNA DE RETORNO (TIR)</b>	<b>25.489% (B)</b>
Tanto el cálculo de cuarto y quinto paso comprueban que TIR corresponde exactamente a 26.50%	

Ahora bien, la forma rápida de calcular la TIR en excel o en calculadora financiera es:	
<b>Inversión Original</b>	<b>-600,000</b>
<b>FNE1</b>	200,000
<b>FNE2</b>	220,000
<b>FNE3</b>	300,000
<b>FNE4</b>	400,000
<b>FUNCIÓN TIR calculada con Excel que es menos exacta</b>	<b>26.50%</b>

**Ejercicio 3**

Io =	2,000,000
FNE1 =	1,200,000
FNE2 =	1,700,000

Valor Presente Neto con 12%

-2,000,000	1,200,000	1,700,000
	1.12	1.2544

-2,000,000	1,071,428.57	1,355,229.59	<b>426,658.16</b>
------------	--------------	--------------	-------------------

CASO 3

Estimación al azahar de los porcentajes	Interpolación por estimación de %	VPN	Menos: Inversión Original	Valor Presente
Escogemos cualquier %	25%	\$2,048,000.00	-2,000,000	\$48,000.00 <sup>(1)</sup>
Escogemos cualquier %	27%	\$1,998,884.00	-2,000,000	<b>-\$1,116.00</b> <sup>(2)</sup>
Entonces significa que el % que buscamos está entre			25%	27%

Ahora hagamos la comprobación de lo anterior:

En este momento se tomarán los valores absolutos, es decir, para estos efectos todos valores son positivos, solamente como números, sin considerar si son \$ o no.

<b>Primer Paso</b>			
27%	VPN	48,000.00000000	(1)
25%	VPN	1,116.00223200	(2)
<b>2 SUMATORIA</b>		<b>49,116.00223200</b>	

<b>Segundo Paso</b>	
Conocemos que la diferencia en valores absolutos entre 25% y 27% son	2
Conocemos que la suma de los Valores Presentes Netos totalizan	49,116.00223200

<b>Tercer Paso</b>		
Ahora se procede a dividir ambos resultados:	<u>2</u>	4.07199E-05 (3)
	49,116.00223200	

<b>Cuarto Paso</b>		
<b>Se calcula la TIR del VPN correspondiente a</b>	27%	
Se multiplica el cociente (3) por la cifra negativa		-1,116.00
Por: Cociente determinado		<u>0.0000407199</u>
Producto		-0.04544352884%
Más: Porcentaje estimado que dio origen al		27.00%
<b>TASA INTERNA DE RETORNO (TIR)</b>		<b>26.955%</b> (A)

<b>Quinto Paso</b>		
<b>Se calcula la TIR del VPN correspondiente a</b>	25%	
Se multiplica el cociente (3) por la cifra positiva		48,000.00000000
Por: Cociente determinado		<u>0.0000407199</u>
Producto		1.95455647%
Más: Porcentaje estimado que dio origen al		25.00000000%
<b>TASA INTERNA DE RETORNO (TIR)</b>		<b>26.955%</b> (B)
Tanto el cálculo de cuarto y quinto paso comprueban que TIR corresponde exactamente a		26.95%

<b>Ahora bien, la forma rápida de calcular la TIR en excel o en calculadora financiera es:</b>	
<b>Inversión Original</b>	<b>-2,000,000</b>
<b>FNE1</b>	<b>1,200,000</b>
<b>FNE2</b>	<b>1,700,000</b>
<b>FNE3</b>	
<b>FNE4</b>	
<b>FUNCIÓN TIR calculada con Excel que es menos exacta</b>	<b>26.95%</b>

Existe otro tipo de cálculo de la TIR solo aplicable a proyectos con duración no mayor a 2 años. Este método es poco usado, pero es conveniente que lo conozcan.

Ejemplo:

Un proyecto requirió de una inversión inicial de 16 millones de pesos, y generó un flujo de efectivo el primer año por 14 millones y en el segundo año 10 millones respectivamente.

¿Cuál fue la TIR de este proyecto?

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$I = -16 + 14 + 10 \text{ (eliminando 6 ceros)}$$

Desarrollo:

$$-16/(1+i)^0 + 14/(1+i)^1 + 10/(1+i)^2 = (1+i)^{-2} = -b \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{2a}}$$

$$(1+i) = \frac{-14 \pm \sqrt{(-14)^2 - 4(-16)(10)}}{2(-16)}$$

$$(1+i) = \frac{-14 \pm \sqrt{196 + 640}}{-32} = \frac{-14 - 28.91366459}{-32} = 1.341052018$$

$$(1+i) = 1.341052018$$

$$i = 1.341052018 - 1$$

$$i = 0.341052018$$

Comprobación:

$$-16 / (1.341052018)^0 + 14 / (1.341052018)^1 + 10 / (1.341052018)^2 = 0.01$$

$$-16 + 10439.56 + 5560.43 = 0$$

### Estimaciones de la duración de actividades

La estimación de la duración de cada actividad es el tiempo total transcurrido estimado desde el momento en que se inician actividad hasta el momento cuando se termina. Con proyectos para los cuales halló un alto grado de incertidumbre respecto a las estimaciones de duración de la actividad, es posible utilizar tres estimaciones para cada actividad:

1. Tiempo óptimo u optimista “o” es el tiempo en el cual un actividad en particular puede terminar se si todo sale a la perfección y no hay complicaciones. Una regla general es que debe haber sólo una oportunidad en 10 de terminar la actividad en menos tiempo la estimación de tiempo optimista.
2. Tiempo más probable “m” es el tiempo en el cual una actividad en particular se termina con frecuencia bajo condiciones normales. Sin actividad se ha repetido muchas veces, la duración real que ocurre con mayor frecuencia puede utilizarse como estimación de tiempo más probable.
3. Tiempo pesimista “p” es el tiempo en el cual un actividad en particular puede terminar se bajo circunstancias adversas como la presencia de complicaciones inusuales o imprevistas. Una regla general es que sólo debe haber una oportunidad en 10 de terminar la actividad en un tiempo menor que la estimación del tiempo pesimista.

Al establecer tres estimaciones de tiempo es posible tomar en cuenta la incertidumbre cuando se estima cuánto durará una actividad. El tiempo más probable debe ser mayor o igual a tiempo optimista, y el tiempo pesimista debe ser mayor o igual el tiempo más probable  $m \geq o \quad p \geq m$

No es necesario hacer tres estimaciones para cada actividad. Si alguien tiene experiencia o datos sobre cuánto requirió la realización de actividades muy similares en proyectos terminados, tal vez sea preferible sólo hacer un estimación de tiempo que se espera que dure un actividad. Sin embargo, utilizar tres estimaciones o, m, p puede ser útil cuando hay un alto grado de incertidumbre con respecto a cuánto durará un actividad.

### Distribución de Probabilidad $\beta$ Beta

En la planeación de red, cuando se utilizan tres estimaciones para cada actividad, se supone que las tres estimaciones siguen una **distribución de probabilidad  $\beta$  beta**.

Con base en esta suposición, es posible calcular una duración esperada, o llamada también media o media aritmética o promedio, “e” para cada actividad de las tres estimaciones de tiempo de la actividad. La duración esperada se calcula:

$$Te = \frac{o+4m+p}{6}$$

Suponga que tiempo optimista para una actividad es de **una** semana, el tiempo más probable es de **5** semanas, y el tiempo pesimista es de **15** semanas.

**Calcule usted la distribución de probabilidad  $\beta$  beta a esta actividad**

$$[1+(4 \times 5)+15]/6 = 6 \text{ semanas}$$

Suponga que tiempo optimista para otra actividad es de 10 semanas, el tiempo más probable de 15 semanas y el tiempo pesimista es de 20 semanas. La distribución de probabilidad  $\beta$  beta a esta actividad sería de

$$[10+(4 \times 15)+20]/6 = 15 \text{ semanas}$$

Los picos de las curvas de las gráficas (a) y (b) representan los tiempos más probables para sus actividades respectivas. La duración esperada divide el área total bajo la curva de probabilidad  $\beta$  beta en dos partes iguales. En otras palabras, el 50% velaría bajo cualquier curva de probabilidad  $\beta$  beta estará a la izquierda de e y 50% está a la derecha. Por ejemplo se muestra que 50% velaría bajo la curva están izquierda de seis semanas y el 50% del área está la derecha de seis semanas. Por tanto, hay una probabilidad del 50 - 50% de que una actividad en realidad requiera más o menos tiempo que la duración esperada. Dicho de otra forma, hay una probabilidad del 0.5 de que una actividad tome más tiempo que e=8, m=12 y que p=22

Se supone que a medida que el proyecto avanza algunas actividades requerirán menos tiempo que su duración esperada y algunas actividades requerirán más tiempo que su duración esperada. Además se supone que a la fecha cuando el proyecto completo se termine, la diferencia neta total entre todas las duraciones esperadas y todas las duraciones reales será mínima.

## Cálculo de probabilidad

Por ejemplo en casi cualquier planeación financiera, se utilizan 3 estimaciones para cada actividad, puede considerarse como técnica estocástica o probabilística, debido a que permite la incertidumbre en la duración de la actividad al incorporar tres estimaciones que se suponen distribuidas según la distribución de probabilidad  $\beta$  ( $\beta$  beta). Cualquier técnica que utiliza sólo una estimación de tiempo, se considera **técnica determinística**. Debido a que se supone que las tres estimaciones de tiempo para cada actividad siguen una distribución de probabilidad  $\beta$  beta, es posible calcular la probabilidad, o posibilidad, de completar en realidad un proyecto antes del tiempo requerido o bien obtener un rendimiento sobre una inversión financiera determinada. Si sólo se utilizan estimación de tiempo para cada actividad, los cálculos de probabilidad no pueden hacerse.

Cuando se utilizan las tres estimaciones de tiempo, todas las actividades en la ruta crítica, por ejemplo, en diagrama de red pueden sumarse juntas para obtener una distribución de probabilidad total. El Teorema del Límite Central establece esta distribución de probabilidad total no es una distribución de probabilidad  $\beta$  beta sino una distribución de **Probabilidad Normal**, que tiene forma de campana y es simétrica en torno a su valor medio.

Además esta distribución de probabilidad total y una duración esperada que es igual a la suma de las duraciones esperadas de todas las actividades que conforman la distribución total. También tiene una varianza que es igual a la suma de las varianzas de todas las actividades que componen la distribución total.

La varianza para la distribución de probabilidad  $\beta$  beta de una actividad se calcula conforme a lo siguiente:

$$\text{Varianza} = \sigma^2 = \left[ \frac{(p-o)}{6} \right]^2$$

Entonces, significa que la varianza de la distribución normal es la suma de las varianzas de la distribución  $\beta$  beta.

Mientras que la duración esperada, la cual divide el área bajo la distribución de probabilidad en dos partes iguales, es una medida de la tendencia central de una distribución, la varianza es una medida de la dispersión, o diseminación, de una distribución de su valor esperado. La **desviación estándar**,  $\sigma$  (Sigma), es otra medida de la dispersión de una distribución y es igual a la raíz cuadrada de la varianza.

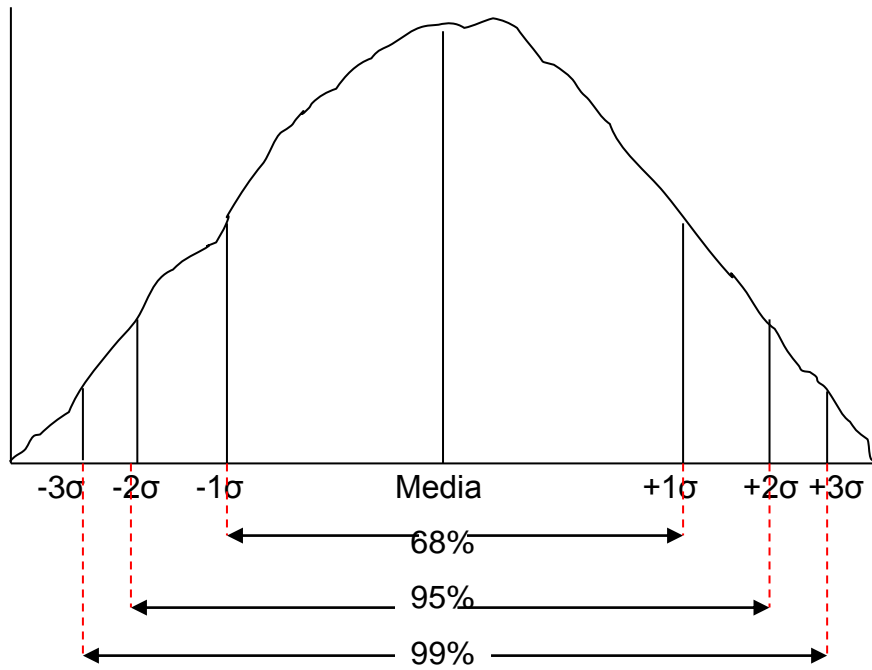
La desviación estándar proporciona una mejor representación visual de la desviación de una distribución de su media, o valor esperado, que la varianza.

Para una distribución normal, (III) el área de una desviación estándar de la media (a ambos lados) incluye cerca del 68% del área total bajo la curva, el área dentro de dos desviaciones estándar incluye cerca del 95% dentro del área total bajo la curva y el área dentro de las tres desviaciones estándar incluye alrededor del 99% del área total bajo la curva.

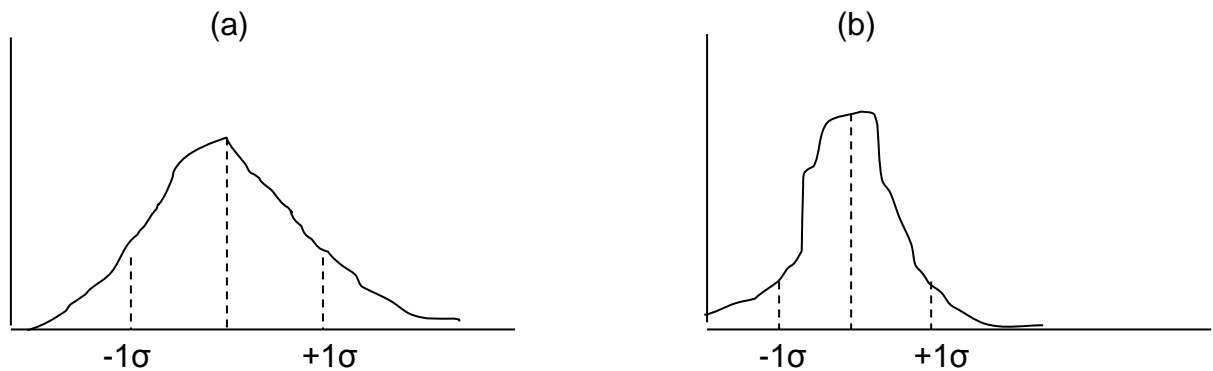
La desviación estándar (IV) es una medida de dispersión de una distribución. En dos distribuciones normales puede observarse una dispersión mayor y por lo tanto tiene una desviación estándar mayor (a) que si la comparamos con otra distribución menos dispersa (b). Sin embargo para las dos distribuciones el 68% del área bajo la curva se incluye dentro de una desviación estándar de la media.

La distribución de probabilidad total de todas las actividades en la ruta crítica del diagrama de red es una distribución normal, con una medida igual a la suma de las duraciones esperadas de actividades individuales y una varianza igual a la suma de las varianzas de actividades individuales.



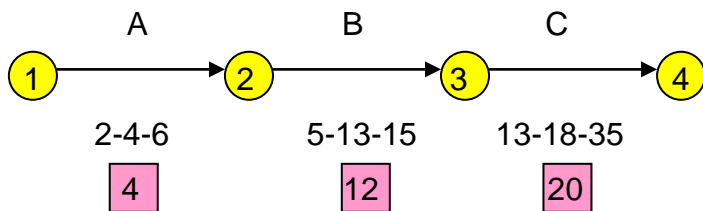


**Distribución de Probabilidad Normal**



Ejemplo de una inversión que puede iniciar en el tiempo "0" y debe terminarse en el día 42.

La distribución de probabilidad para las actividades, son como sigue:

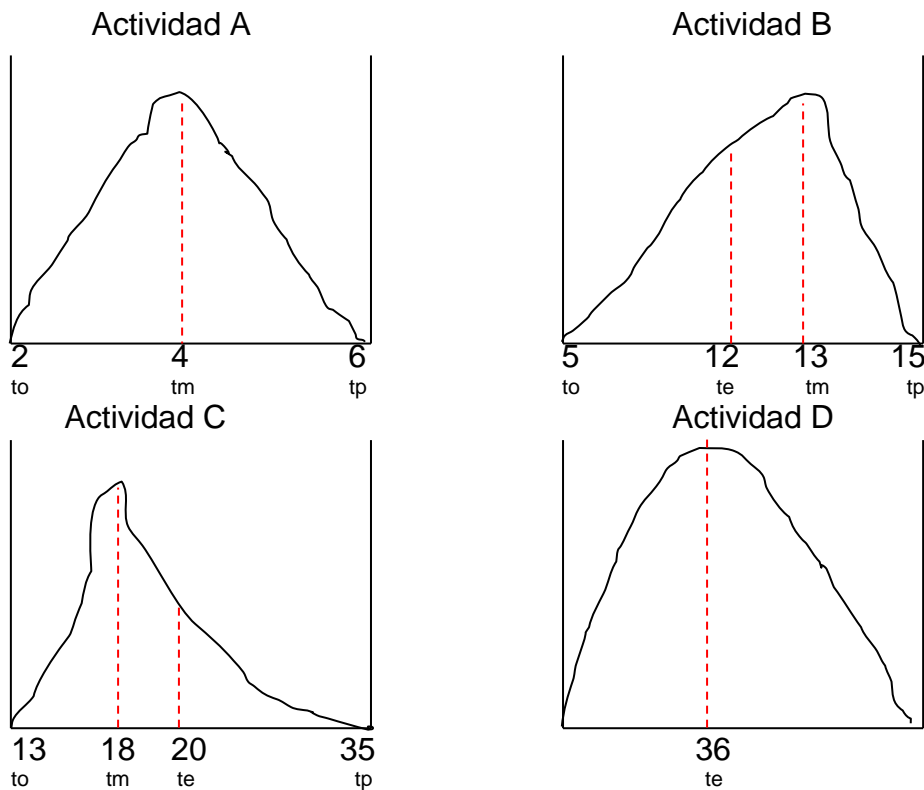


Finalización Requerida: 42 días

Actividad A = "o" 2 - "m" 4 - "p" 6 $te = [2+4(4)+6]/6 =$	4 días
Actividad B = "o" 5 - "m" 13 - "p" 15 $te = [5+4(13)+15]/6 =$	12 días
Actividad C = "o" 13 - "m" 18 - "p" 35 $te = [13+4(18)+35]/6 =$	20 días
Total =	36 días

A	2	4	6
B	5	13	15
C	13	18	35
Total	20	35	56
$Te = [20 + 4(35) + 56] / 6 = 36$ días			

**VI**



Este resultado es el mismo que la suma de las tres duraciones individuales esperadas que se calcularon anteriormente  $4+12+20=36$  días.

La duración total esperada para la ruta 1- 2-3-4 es 36 días. Por lo tanto el proyecto tiene una primera fecha de terminación del día 36.

El proyecto tiene una fecha de terminación requerida para el día 42.

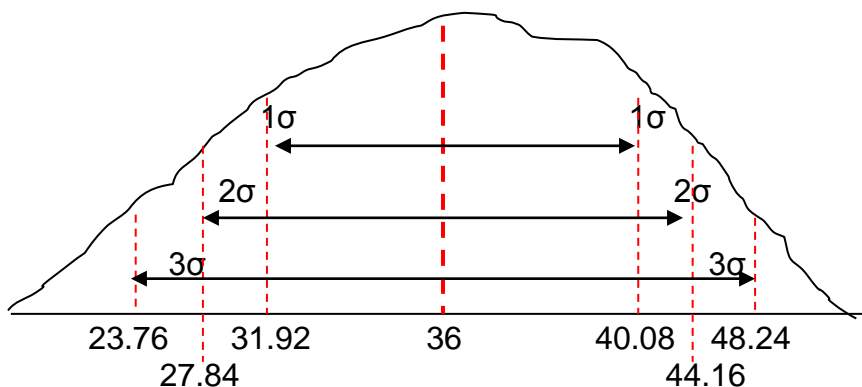
La distribución total en el tiempo transcurrido medio igual a la suma de las tres medias o duraciones individuales esperadas. Existe una probabilidad del 50% de que el proyecto se termine antes de día 36 y una probabilidad del 50% de se termine después del día 36.

La varianzas para distribución  $\beta$  beta de las tres actividades es la siguiente:

Actividad A Sigma $\sigma^2 = [(6-2)/6]^2 =$	0.444
Actividad B Sigma $\sigma^2 = [(15-5)/6]^2 =$	2.778
Actividad C Sigma $\sigma^2 = [(35-13)/6]^2 =$	13.444
Total =	16.666

La varianza para distribución total, es una distribución de probabilidad normal, es la suma de las tres varianzas o sea 16.666. La desviación estándar  $\sigma$  Sigma de la distribución total es  $\sigma = \sqrt{16.666} = 4.08$  días.

### Distribución de Probabilidad Normal para el Proyecto ejemplificado



36	36
4.082482905	4.082482905
31.9175171	40.0824829
31.9175171	40.0824829
4.082482905	4.082482905
27.83503419	44.16496581
27.83503419	44.16496581
4.082482905	4.082482905
23.75255129	48.24744871

Probabilidad del <b>99%</b> (0.99) de terminar el proyecto entre	23.75255129	48.24744871
Probabilidad del <b>95%</b> (0.95) de terminar el proyecto entre	27.83503419	44.16496581
Probabilidad del <b>47.5%</b> (0.0.475) de terminar el proyecto entre	27.83503419	36.0000000
Probabilidad del <b>47.5%</b> (0.0.475) de terminar el proyecto entre	36.0000000	44.16496581
Probabilidad del <b>68%</b> (0.68) de terminar el proyecto entre	31.9175171	40.0824829
Probabilidad del <b>34%</b> (0.34) de terminar el proyecto entre	31.9175171	36.0000000
Probabilidad del <b>34%</b> (0.34) de terminar el proyecto entre	36.0000000	40.0824829
Probabilidad del <b>13.5%</b> (0.0.135) de terminar el proyecto entre	27.83503419	31.9175171
Probabilidad del <b>13.5%</b> (0.0.135) de terminar el proyecto entre	40.0824829	44.16496581
Probabilidad del <b>0.5%</b> (0.005) de terminar el proyecto <b>antes</b> de		23.75255129
Probabilidad del <b>0.5%</b> (0.005) de terminar el proyecto <b>después</b> de		48.24744871

<b>Cálculo de la Probabilidad</b>		
Probabilidad	42	<b>36</b>
$Z = \frac{UT - PT}{\text{Sigma}}$	4.082482905	<b>1.469693846</b>
Sigma		Hay 1.47 desv.std entre PT y UT

UT= Fecha de term. Req. Última  
 PT= Prim. Fecha de Te promedio  
 Sigma

Buscamos en la tabla .42922 significa que para Z=1.47 se desplaza en la curva hacia la izq. 1.4 luego hasta la columna 0.07 y ahí se encuentra el número .42922 ó 42.922% Por tanto 42.92% es la posibilidad, de terminar entre PT y UT o entre 26 y 42 días Queremos una posibilidad de terminar el proyecto antes de 42 días, por tanto  $0.50000000 + 0.42922 = 0.92922$  o lo que es igual a 92.922% de terminar antes del día 42

1.469693846	<b>Dato de la Tabla</b>
	0.42922

Esto se ve representado en los precios de sus acciones, y el pago de dividendos, que se reflejan en los propios inversionistas tanto que como accionistas verán crecer sus rendimientos, rentas o recursos, siempre y cuando dichos dividendos sean superiores a las tasas de interés que se les pague en el mercado bancario, y que éstos deberán renunciar hoy a su "Costo de oportunidad" con el fin de tener en el mañana mejoras financieras altamente sustanciales.

El comportamiento, la estabilidad y negociabilidad de una inversión, está sujeta a los siguientes factores:

- 1.** Al pago de dividendos si se mantiene en períodos.
- 2.** Venta final - compra inicial dado por la diferencia, si lo negocia en el mercado.
- 3.** Venta Final + Dividendos - Compra Inicial sí se negocia al final del período.

En el caso colombiano se negocian títulos de renta variable como acciones o renta fija como: CDT'S, Bonos, etc. Estos últimos tienen garantía de certidumbre sin ningún nivel de riesgo; se conoce el interés, lo mismo que su maduración en el tiempo, en especial aquellos emitidos por el Gobierno Nacional a través del Banco de la República que cuentan con una gran seguridad, al contrario de los Títulos de Renta Variable donde existe gran incertidumbre por negociarse al libre juego de la oferta y la demanda del mercado.

Durante muchas décadas el mercado Bursátil colombiano se ha caracterizado por ser un mercado doméstico o interno sin ninguna relevancia a nivel internacional, esto se demuestra por la tendencia a la baja de las transacciones en la bolsa de Bogotá, Medellín y Occidente, como se desprende de la estadística del semanario "Portafolio", donde se muestra que éste es un mercado de capitales de baja intensidad, y con una participación muy baja en el mercado accionario que representa entre el 10% y 20% sobre el total.

Adicional a lo anterior, la gran variabilidad de las tasas de interés del mercado que inciden en forma directa en la volatilidad de estos papeles variables, crean una gran incertidumbre, generando altos niveles de nesgo en dichos papeles. La teoría financiera ha desarrollado modelos para tratar de incertidumbre con alto nesgo. Todos los humanos tenemos aversión al nesgo, en especial los inversionistas o rentistas. Esta es una característica de las preferencias del individuo en situaciones donde debe correrlo. Lo que origina una medida de la disposición a pagar con tal de aminorar la exposición al riesgo"**1**

Las familias afrontan nesgo a: enfermedad, desempleo, etc., lo mismo que las empresas a acreedores, accionistas, empleados, etc., esto lleva a la necesidad de tratar de evaluarlo o medirlo, para ello es necesario conocer en forma amplia el entorno económico nacional e internacional, las fuentes de información de las empresas, los movimientos de las bolsas de valores, el negocio de compra y venta de acciones, la coyuntura política. La "eficiencia en un mercado financiero", se demuestra cuando los procesos de los valores reflejan toda la información que hay disponible para el público acerca de la economía, los mercados financieros y la compañía específica involucrada."**2**

A los inversionistas les interesa de sobremanera, conocer cómo dimensionar los niveles de nesgo de los diferentes activos y sus acreencias o pasivos financieros, ya que les servirá para adoptar decisiones de inversión.

Con el desarrollo de la teoría del portafolio a través de la cartera, que es el análisis cuantitativo más óptimo para llegar a una sana inversión, con un presente de maximización tanto para las familias como para las empresas,, se ha desarrollado el modelo presentado

por Harry Markowitz, el cual recurre a la distribución de probabilidad, que es una forma de describir los valores futuros posibles para una cantidad del activo financiero. Se cuantifica el activo entre el riesgo y su valor esperado con la media de la distribución; el riesgo con la desviación típica standard.

Valor esperado =  $P_1X_1 + P_2X_2 \dots + P_nX_n$ ,

donde:
P1 es la probabilidad de obtener X1
P2 es la probabilidad de obtener X2
X es la media de la distribución

La desviación típica mide la variabilidad alrededor del valor esperado (o sea la media), y ésta permite dar confiabilidad del valor esperado, partiendo de la varianza.

Varianza:  $P_1(X_1 - X)^2 + P_2(X_2 - X)^2 + \dots + P_n(X_n - X)^2$

• P1 es la probabilidad de X1
• P2 es la probabilidad de X2
• X es la media de la distribución

Si se supone que la acción tiene un precio actual de \$ 500 y no paga dividendo, si las compra hoy y piensa venderlas en un año, no olvide que los precios se comportan de acuerdo con el mercado de la oferta y demanda. Los comportamientos históricos de dicha acción serán:

Probabilidad	(P1)	.10	.20	.40	.20	.10
Cantidad	(X1)	400	500	600	700	800

$$VE = .10(400) + .20(500) + .40(600) + .20(700) + .10(800) \quad VE = \$600$$

$$VARIANZA: .10(400-600)^2 + .20(500-600)^2 + .40(600-600)^2 + .20(700-600)^2 + .10(800-600)^2 = \$12.000$$

$$DS = 12000^{1/2}$$

La Desviación Standard es la raíz cuadrada de la varianza. Cuanto mayor sea la Desviación Standard, más disperso será el precio. Por lo tanto, esta es una medida de nesgo. Cuánto será el precio de esta acción?

Existe la posibilidad de que el valor real esté alejado más de dos veces la desviación standard del Valor Esperado. El precio real estará entre:  $600 - 220 = \$ 380$  y  $600 + 220 = \$ 820$

Pero además se debe relacionar la Desviación Standard y el Valor Esperado =  $110/600 = 0.18$  lo que nos indica que es probable que el precio se encuentre muy cerca del Valor Esperado = \$600, esto se conoce como el coeficiente técnico; este método nos sirve para comparar con otras alternativas de inversión. **3**

Markowitz hace claridad en que los inversionistas le temen y con razón al riesgo de colocar sus unidades monetarias en acciones e incluso en papeles de renta fija; lo importante es diversificar y no colocar todo el dinero en un solo activo porque se corre el nesgo de perder toda la inversión. Por lo que se concluye que para un inversionista que posee una cartera en vanos activos diferentes será más importante su nesgo total, que el de un activo de dicha cartera en particular. Al medir el nesgo de un activo con respecto a su cartera total, en este caso, no se debe contentar con la desviación standard de la tasa de retomo de dicho activo adicional sino que se debe calcular el grado de correlación, por el cual dichas reformas están interrelacionadas con las de la cartera total.

"La correlación mide el grado por el cual dos variables tales como el retomo en dos títulos se mueven juntos", toma en valores numéricos el orden de -1.0 a 1.0, como a continuación se explica:

- \* Correlación entre A y B = 1.0 Positiva
- \* Correlación A y C = -1.0 Negativa
- \* Correlación B y C = 1.0 Negativa

**Economía**

**Acción A**

**Acción B**

**Acción C**

<b>Auge</b>	<b>\$70</b>	<b>\$60</b>	<b>\$40</b>
<b>Normal</b>	<b>\$60</b>	<b>\$50</b>	<b>\$30</b>
<b>Recesión</b>	<b>\$50</b>	<b>\$40</b>	<b>\$20</b>

<b>CARTERA A Y B</b>			
Economía	A	B	A + B
Auge	\$70	\$60	\$130
Normal	\$60	\$50	\$110
Recesión	\$50	\$40	\$90

<b>CARTERA A+C</b>			
Economía	A	B	A + B
Auge	\$70	\$40	\$110
Normal	\$60	\$50	\$110
Recesión	\$50	\$60	\$110

**En el ejemplo anterior se obtiene:**

- 1 Cuando sube una acción, proporcionalmente subirá la otra, lo mismo pasaría en la baja de un precio en las Acciones A Y B cuya correlación es perfectamente positiva 1.0
2. Cuando los precios de las acciones se mueven en sentidos opuestos, la correlación será negativa 1.0 en las Acciones A y C.
3. Si la correlación es 0, no hay tendencia definida. La correlación indicará la diversificación

A + C la correlación es 1.0 se elimina todo el riesgo y se alcanza el mayor grado de la diversificación, pero la anotación importante es que la correlación negativa y de 0 entre los retornos de títulos no se da en la economía casi nunca, la sugerencia es saber diversificar los títulos, en especial en aquellos países de alta volatilidad financiera como Colombia, y que se destacan por la estrechez del mercado de capitales; el reto principal es el de insertarse a los mercados bursátiles internacionales, pero con una economía sólida, que permita atraer capitales e inversionistas extranjeros, y fortalecer la negociación de nuevos derivados financieros.