

# **ACCIONES Y OTROS TÍTULOS DE INVERSIÓN**

**TASAS EFECTIVAS DE RENDIMIENTO ANUAL Y MENSUAL:** Es aquélla que se emplea en la compraventa de algunos valores en el Mercado Bursátil o Bolsa de Valores.

Estas tasas son muy útiles para comparar 2 o más alternativas de inversión, facilitando así la mejor decisión.

**Tasa de rendimiento anual:**

$$I_e = (1 + I)^{365/q} - 1$$

**Y la tasa efectiva de rendimiento mensual:**

$$I_e = (1 + I)^{30/q} - 1$$

De donde  $i$  es la tasa de interés correspondiente a un período de  $q$  días y está dada por el cociente de los intereses entre el Capital, es decir:

$$I = I / C$$

Estas fórmulas pueden ajustarse a otros períodos diferentes a 360 y 30 días.

**Caso práctico TASA EFECTIVA DE RENDIMIENTO ANUAL Y MENSUAL DADA LA COTIZACIÓN EN LA BOLSA DE VALORES.**

## MATEMÁTICAS FINANCIERAS

Las acciones de Televisa se cotizaron en 50.08 el 25 de noviembre y en 52.25 el 10 de febrero del año siguiente. ¿Cuál es la tasa efectiva de rendimiento mensual? y ¿Cuál es la tasa de rendimiento anual?

La primer cotización es un capital y la segunda es el valor futuro y la diferencia entre ambas es igual a los intereses generados.

	<b>I=</b>	<b>52,25</b>	<b>-</b>	<b>50,08</b>	<b>I = M-C</b>	
	<b>I=</b>	<b>2,17</b>				

	<b>Días</b>
<b>nov</b>	<b>5</b>
<b>dic</b>	<b>31</b>
<b>ene</b>	<b>31</b>
<b>feb</b>	<b>10</b>
<b>total</b>	<b>77</b>

La tasa de interés para los		<b>77</b>	días es:		
	<b>i=</b>	<b>2,17</b>	<b>/</b>	<b>50,08</b>	<b>= 0,043330671</b>

		La tasa efectiva de rendimiento mensual, según la fórmula es			
	<b><math>i_e = (1 + I)^{30/q} - 1</math></b>		<b><math>i_e = (1 + 0.043330671)^{30/77} - 1</math></b>		
	<b>ie=</b>	<b>1,016663876</b>	<b>-1</b>		
	<b>ie=</b>	<b>0,016663876</b>	<b>x100</b>		
	<b>ie=</b>	<b>1,66638764</b>	<b>%mensual</b>		

<b>Rendimiento anual</b>		
	<b><math>i_e = (1 + 0.043330671)^{365/77} - 1</math></b>	
<b>ie=</b>	<b>1,222714168</b>	<b>-1</b>
<b>ie=</b>	<b>0,222714168</b>	<b>x100</b>
<b>ie=</b>	<b>22,27141677</b>	<b>%</b>

## MATEMÁTICAS FINANCIERAS

### EJEMPLO SOBRE TASA EFECTIVA DE RENDIMIENTO MENSUAL.

¿Cuál es la tasa efectiva de rendimiento mensual de las acciones que el 3 de julio se cotizaron en \$75.21 y el 29 del mismo mes, estuvieron en 79.93

¿Cuál es la tasa efectiva de rendimiento mensual de las acciones que el 3 de julio					
de cotizaron en	75,21	and	el 29 del mismo mes estuvieron en	73,93	
<b>SOLUCIÓN</b>					
Como el plazo incluye solo una de las 2 fechas,, se obtiene el número de días.					
julio	3	julio	29	26	días
Los intereses son la diferencia entre el Valor Futuro y el Capítla					
i=	73,93	-	75,21	=	1,28
Y la tasa para ese lapso es:					
i=	1,28	/	75,21	i=I/C	exponente 30 días
i=	0,017019013		30	/	26
i <sub>e</sub> =	$[1+(-0,01701+013)]^{30/26} - 1$				
i <sub>e</sub> =	0,982980987	$^{30/26} - 1$			
i <sub>e</sub> =	0,98038851	- 1			
i <sub>e</sub> =	0,01961149	=	1,96	mensual	
Lo anterior significa que en un período de 30 días, un mes, la pérdida en el precio					
de las acciones es aproximadamente 1.96%. Suponiendo que se sostiene la tasa					
de reducción durante todo el año, entonces la tasa anual sería:					
i <sub>e</sub> =	0,982980987	$^{365/26} - 1$			
i <sub>e</sub> =	0,785859525526	- 1			
	0,21414047	=	21,414	anual	

### COMPRA DE VALORES FINANCIEROS CON DESCUENTO

El precio de compraventa de los títulos de inversión pueden ser ya sea mayores a los de su redención o sea que se compran con "prima", pero si dichos valores se compran con descuento, es decir, el precio es menos que el valor de redención, entonces el descuento estará dado por  $D = ndM$  y el precio de mercado sería

$$P = M (1 - nd)$$

## MATEMÁTICAS FINANCIERAS

**M** = Valor de redención o valor nominal cuando se redime a la par.

**d** = Tasa de descuento simple.

**n** = Plazo

**n** y **d** deben estar en la misma unidad de tiempo, en este caso, en días.

Hay diferentes tasas:

- Tasa efectiva de rendimiento anual.
- Tasa efectiva de rendimiento mensual. (Ambas se aplican al valor de compraventa, con la siguiente ecuación y constituye el mejor indicador para comparar diferentes alternativas de inversión.
- El precio del Mercado, o sea lo que se paga por el título y sus cupones estará dado por el siguiente teorema:

$$C = M(1+i/p)^{-np} + R \left( \frac{1 - (1 + i/p)^{-np}}{i/p} \right)$$

De donde:

**M** = Valor de Redención

**R** = Es el valor de cada cupón

**i** = Es la tasa de rendimiento anual, capitalizable en "p" periodos por año y "n" es plazo en años, el tiempo que hay entre la fecha de compraventa y la redención, excepto **R** y **M**, las literales de esta fórmula tienen el significado de antes y además el valor de cada cupón está dado por:

$$R = N(r/p)$$

De donde:

**N** = Valor Nominal de la Obligación o Bono

**r** = Tasa de interés anual determinado por la Emisora.

**M** y **N** son iguales siempre y cuando el Bono se redima a la Par.

## MATEMÁTICAS FINANCIERAS

### Caso práctico: Utilidades por comprar Papel Comercial.

El 4 de mayo del 2014, una empresa ofreció Papel Comercial. Usted debe obtener las utilidades si compra 20,000 pagarés y debe calcular la tasa efectiva de rendimiento anual:

A.- La tasa de descuento es:

$d = 0.2144$  simple anual.

$n =$  Plazo de 36 días

$M =$  Monto del Valor Nominal = 100

Por tanto el valor comercial es:

**a)**

<b>d=</b>	<b>0,2114</b>
<b>n=</b>	<b>36 días</b>
<b>M=</b>	<b>100 Valor Nominal</b>

**Valor Comercial =**

$$P = 100 [1 - 36(0.2144 / (360))] ]$$
$$p = (1 - nd)$$
$$P = 100(0,97856)$$
$$P = 97,856$$

**La utilidad por cada pagaré es la diferencia**

**100-97.856**

**2,144**

**LA utilidad total de 20,000 pagarés =**

**42.880**

**b) La tasa a 36 días es:**

$i = 2,144 / 97.856$

$i = I / C$

$i = 2,144 / 97.856$

$i = 0.021909745$

**La tasa nominal anual se obtiene dividiendo este resultado entre 36 y multiplicándolo por 360**

$(0.021909745 / 36) 360 = 0.219097449$

**La tasa anunciada por el emisor fue de 21.90% y significa que si se aplica el precio de mercado, dará como resultado el valor nominal del pagaré, o sea,**

$M = 97.859 [1 + (36/360) 0.219097499] = 97.856 (1.021909745)$

$M = 97.859 [1 + (36/360) 0.219097499] = 97.856 (1.021909745)$

$M = 100$

**Con la fórmula de la tasa efectiva se obtiene el rendimiento anual:**

$ie = (2 + 0.021909745)^{365/36} - 1$

$ie = 0.245755186$  ó **24.58%**

# MATEMÁTICAS FINANCIERAS

## INVERSIONES EN LA BOLSA DE VALORES

Si utilizamos la Teoría Moderna de Portafolios MPT (*“Modern Portafolios Theory”*), los administradores de las Sociedades de Inversión miden el rendimiento de la cartera. El objetivo es el de *obtener la mejor combinación de rendimientos de diversas inversiones, para un nivel de riesgo determinado*. Su metodología se enfoca a la búsqueda de inversiones cuyos rendimientos esperados estén negativamente correlacionados.

Existen tres extremos de correlación entre dos inversiones, una de ellas **POSITIVA**, otra **NEGATIVA** y la última, la **NULA**.

a) La perfectamente **POSITIVA** (que se mide como uno), implica que su rendimiento sube en promedio en la misma proporción.

b) La correlación **NEGATIVA**, medida como menos uno, implica que el rendimiento de una inversión disminuye en promedio en la misma proporción en la que la otra sube.

c) La correlación **NULA** o **CERO**, implica que no haya ninguna forma de relacionar el rendimiento promedio de una inversión con el rendimiento promedio de la otra.

**Ejemplo:** Si una cartera estuviera compuesta al 50% (q) por CETES con rendimiento del 10% (RCT) y el otro 50% por Papel Comercial con rendimiento del 20%, su rendimiento esperado sería:

$$E(RC) = q(RCT) + (1 - q)RP$$

De donde:

E (RC) = Rendimiento esperado de la cartera  
q = Proporción que le corresponde a cada instrumento, respecto del total.  
RCT = Rendimiento del CETE  
RP = Rendimiento del Papel Comercial

Determine usted el Rendimiento Esperado

$$E(RC) = 0.50(10) + 0.50(20)$$

$$E(RC) = 15\%$$

## MATEMÁTICAS FINANCIERAS

Este ejemplo nos muestra que la combinación de dos instrumentos en una cartera, ofrece una combinación de riesgo que logra un rendimiento del 15%

Otra forma de calcular el rendimiento de esta combinación, es reconociendo que si el CETE tiene una tasa sin riesgo del 10% y la diferencia entre su rendimiento y el del Papel Comercial se representa por una prima de riesgo, es decir, 10%, que multiplicada por la proporción de la cartera, sería:

$$E (RC) = 10 + 0.50 (20-10) = 15\%$$

Calcular la combinación de rendimientos pudiera resultar simple, pero no lo es calcular la combinación de riesgos, ya que aquí debe medirse de antemano la Desviación Estándar (riesgo) de la inversión con riesgo y ser multiplicada por la proporción de ésta respecto del total.

De tal forma que, si la *Desviación Estándar* de la inversión riesgosa es del 40%, el resultado sería:

$0.50 (40) = 20\%$  de Desviación Estándar por toda la cartera, incluyendo el CETE, considerado como una inversión no riesgosa.

La combinación de instrumentos riesgosos y no riesgosos, origina entonces, combinaciones de riesgo y rendimientos particulares.

A veces las combinaciones serán de beneficio para el inversionista y en otras serán en su perjuicio.

Si tomáramos como base el ejemplo anterior, el inversionista, a través de la combinación de las dos inversiones, pudo obtener un riesgo menor que solo invirtiendo en un solo instrumento.

### Crecimiento de Dividendos

Una empresa acaba de pagar un dividendo de 3 dls por acción y los dividendos de esta empresa crecen a una tasa constante del 8% al año.

Diga usted ¿Cuál sería el dividendo dentro de 5 años? O dicho de otra forma ¿Cuál es el monto futuro?

$$^5 \$3 \times 1.08 = \$3 \times 1.4693 = 4.40798423 \text{ dls}$$

Entonces usted ya puede concluir que el dividendo aumentará 1.41 dls a lo largo de los 5 años siguientes ( $4.41-3=1.41$ )

## MATEMÁTICAS FINANCIERAS

Si un dividendo crece a una tasa constante, habremos reemplazado el problema de pronosticar un número infinito de dividendos futuros por el de estimar una sola tasa de crecimiento, o sea, simplificamos el problema. En este caso, si permitimos que  $D_0$  represente al dividendo que se acaba de pagar y si permitimos que “ $g$ ” sea la tasa de crecimiento constante, el valor de las acciones de capital se representaría matemáticamente así:

$$P_0 = \frac{D_1}{(1+R)} + \frac{D_2}{(1+R)^2} + \frac{D_3}{(1+R)^3} + \frac{D_4}{(1+R)^4} + \dots + \frac{D_n}{(1+R)^n}$$

$$P_0 = \frac{D_0(1+g)}{(1+R)} + \frac{D_0(1+g)^2}{(1+R)^2} + \frac{D_0(1+g)^3}{(1+R)^3} + \dots + \frac{D_0(1+g)^n}{(1+R)^n}$$

En tanto la tasa de crecimiento  $g$  sea inferior a la tasa de descuento  $r$ , el valor presente de esta serie de flujos de efectivo se puede escribir como sigue:

### MODELO DE CRECIMIENTO DE DIVIDENDOS

$$P_0 = \frac{D_0 \times (1+g)}{(R - g)} = \frac{D_1}{(R - g)}$$

A esta fórmula la llamaremos **Modelo de Crecimiento de Dividendos**

Suponga de  $D_0 = \$2.30$  dls  $R=13\%$  y  $g=5\%$  ¿Cuál sería el precio de la acción?

$$P_0 = D_0 \times (1+g)/(R-g)$$

$$P_0 = 2.30 \times 1.05/(0.13-0.05)$$

$$P_0 = 2,415/0.08$$

$$P_0 = 30.19$$

De hecho podemos utilizar el modelo de crecimiento de dividendo para obtener el precio de una acción en cualquier momento, no solo el día de hoy. En general, el precio de la acción en el momento “ $t$ ” es de:



## MATEMÁTICAS FINANCIERAS

$$P_0 = \frac{D_t \times (1+g)}{(R - g)} = \frac{D_{t+1}}{(R - g)}$$

Suponga usted que estamos interesados en conocer el precio de la acción después de 5 años  $P_5$ .

En primer lugar necesitamos calcular el dividendo en el momento 5,  $D_5$ . Toda vez que el dividendo que se acaba de pagar es de 2.30 y ya que la tasa de crecimiento es del 5% anual,  $D_5$  será de:

$$D_5 = 2.30 \times 1.05^5 = 2.30 \times 1.2763 = 2.93544759$$

Ahora bien, con base en el modelo de crecimiento de dividendos, podemos obtener el precio de la acción dentro de 5 años:

$$P_0 = \frac{D_t \times (1+g)}{(R - g)} = \frac{(2.935 \times 1.05)}{(0.13 - 0.05)} = \frac{3.0822}{0.08} = 38.53$$

### CRECIMIENTO DE DIVIDENDOS (Acciones en crecimiento)

El próximo dividendo de la empresa Carlos Cuaxospa SA de CV será de 4 dlls por acción. Los inversionistas requieren al menos de un rendimiento del 16%.

La empresa Cuaxospa SA se ha caracterizado por aumentar un 6% cada año. Si usted se basa en el Modelo de Crecimiento de Dividendos, diga usted **¿Cuál será el valor actual de las acciones de SA? ¿Cuál será el valor dentro de 4 años?**

Después de haber estudiado el crecimiento de las acciones a través de los dividendos, realmente el problema en este ejercicio es que el próximo dividendo,  $D_1$ , será de 4 dlls, por lo que no se puede multiplicarse por  $(1+g)$ .

Procedimiento de resolución:

**Primer Paso:** Encontrar el valor de  $P_0$  (Precio de la Acción)

Con las condiciones anteriores, el precio por acción sería:

$$P_0 = \frac{D_1}{(r-g)}$$

si sustituimos valores en esta fórmula, tendremos:

$$P_0 = 4 / (16\% - 6\%)$$
$$P_0 = 40 \text{ dólares}$$

## MATEMÁTICAS FINANCIERAS

**Segundo Paso:** Una vez conocido el valor del dividendo que será pagado dentro de un año, sabremos que el dividendo que se pagará dentro de 4 años, será. (Si ya calculamos lo del primer año, ahora solo resta calcular lo de los 3 años siguientes):

$$D_1 \times (1+g)^3$$

Si sustituimos valores tendremos:

$$4 \times 1.06^3 = 4.764064$$

**Tercer Paso:** Debemos calcular el precio dentro de 4 años:

$$P_4 = D_4 \times (1+g)/(R-g)$$

$$P_4 = 4.764064 \times 1.06 / (0.16 - 0.06)$$

$$P_4 = 50.4990784 \text{ dólares por acción}$$

**Conclusiones:**

Observe usted que en este ejemplo que  $P_4$  es igual a  $P_0 \times (1+g)^4$

$$P_4 = 50.50 = 40 \times (1.06)^4 = P_0 \times (1+g)^4$$

¿Por qué es así? Para comprender la razón de ésto, observe que:

$$P_4 = D_5 / (R-g)$$

Sin embargo,  $D_5$  es igual a  $D_1 \times (1+g)^4$ , porque podemos escribir  $P_4$  como:

$$P_4 = D_1 \times (1+g)^4 / (R-g), \text{ si reacomodamos la fórmula:}$$

$$P_4 = [D_1 / (R-g)] \times (1+g)^4$$

$$P_4 = P_0 \times (1+g)^4$$

Este ejemplo le ha permitido entender que el modelo de crecimiento de dividendos supone, implícitamente, que: **El precio de las acciones crecerá a la misma tasa constante que los dividendos**, lo cual, realmente no nos debiera sorprender. Ello nos indica que **si los flujos de efectivo sobre una inversión crecen a una tasa constante o a través del tiempo, lo mismo sucederá por consecuencia con el valor de esa inversión.**

Otra pregunta que usted podría hacerse es que pasaría con este modelo, si la tasa de crecimiento "g" fuera mayor que la tasa de descuento "R".

## MATEMÁTICAS FINANCIERAS

En principio, el precio de las acciones sería negativo porque “R-g” sería inferior a “0”, lo cual no sucedería, ya que si la tasa de crecimiento constante supera a la tasa de descuento, el precio de las acciones sería infinitamente grande, ya que si la tasa de crecimiento fuera mayor que la tasa de descuento, el valor presente de los dividendos, seguiría incrementándose.

Este razonamiento será también verdad cuando la tasa de crecimiento y la de descuento sean iguales. En ambos casos, la simplificación que nos permite reemplazar la corriente infinita de dividendos, por el modelo de crecimiento de dividendos es ilegal, por lo que las respuestas obtenidas a partir de ellos no tienen sentido alguno, a menos de que la tasa de crecimiento sea inferior la tasa de descuento.

Para finalizar, la expresión que utilizamos para el caso de un crecimiento constante funcionará también para cualquier perpetuidad en crecimiento, no solo para los dividendos sobre las acciones comunes. Si  $A_1$  es el siguiente flujo de efectivo sobre una perpetuidad en crecimiento, el valor presente de los flujos de efectivo estará dado por:

$$\text{Valor Presente} = A_1/(R-g) = A_0(1+g)/(R-g)$$

Observe que en esta expresión se ve igual al resultado correspondiente a cualquier perpetuidad ordinaria, excepto que tenemos “R-g” en la línea inferior en lugar de sólo tener R.