Anualidades Vencidas, Anticipadas y Diferidas.

"El dinero proporciona algo de felicidad. Pero a partir de cierto momento el dinero sólo proporciona más dinero"

Neil Simon.

Objetivo de la sesión:

- **Conocer el concepto de anualidad.**
- **Identificar, definir y explicar los diferentes tipos de anualidades.**
- **Identificar situaciones en las que se apliquen las anualidades.**
- **Plantear y resolver problemas de anualidades vencidas, anticipadas diferidas.**

Introducción.

Anualidad se define como una serie de pagos por lo general iguales realizados en intervalos de tiempo iguales. La palabra anualidad parece implicar que los pagos se efectúan cada año, pero esto no es así, ya que pueden ser mensuales, quincenales, semanales, etcétera.

Un ejemplo de anualidades sería:

- **El cobro quincenal del sueldo.**
- **El pago mensual de un crédito hipotecario.**
- **Los abonos mensuales para pagar una computadora.**

- **El pago anual de un seguro de vida.**
- **Los dividendos semestrales pagados a los accionistas.**
- **Los depósitos bimestrales del fondo de retiro.**

El concepto de anualidad es de gran importancia en matemáticas financieras ya que es muy frecuente que las transacciones comerciales impliquen una serie de pagos hechos en intervalos de tiempo iguales, en lugar de un pago único al final del plazo.

Los términos de renta, pago periódico, abono, entre otros nombres, son utilizados en lugar de la palabra anualidad.

El tiempo que transcurre entre dos pagos sucesivos se le llama "periodo de pago" o "período de renta". El periodo de pago puede ser anual, semestral o mensual entre otros períodos.

El tiempo que transcurre entre el inicio del primer período de pago y del último pago, se le llama plazo de la anualidad.

Una persona compra un televisor en 13 mensualidades de $485 cada una. Identifique lo que es anualidad, periodo de pago, y el plazo de la anualidad.

Existen cuatro formas de clasificar las anualidades:

1. **Utilizando el tiempo, existen cuatro formas:**

Ciertas	**Contingentes**
Una anualidad cierta es aquella en la cual los pagos comienzan y terminan en fechas perfectamente determinadas. Por ejemplo, al comprar un aparato eléctrico en una tienda detallista, se establecen de antemano las fechas de inicio y terminación del crédito	**una anualidad contingente es aquella en la cual la fecha del primer pago, la fecha del último pago o ambas, dependen de algún suceso que se conoce va a ocurrir. Por ejemplo, un contrato de seguro de vida dice que la suma asegurada se entregue el beneficiario del seguro en 12 pagos mensuales iguales. Se sabe que los pagos se harán al morir el asegurado, pero no se sabe cuándo va a morir. Por eso se le llama contingente.**

2. **utilizando los pagos o abonos como criterio de clasificación, las anualidades pueden ser:**

Vencidas	**Anticipadas**
Una anualidad vencida, se le conoce también como anualidad ordinaria, y es aquella cuyos pagos se efectúan al final de cada periodo.	**La anualidad anticipada, es aquella cuyos pagos se hacen el principio de cada periodo.**

3. **Utilizando los intereses como criterio de clasificación, las anualidades pueden ser:**

Simples	**Generales**

La anualidad simple es aquella cuyo periodo de pago coincide con el periodo de capitalización de intereses. Por ejemplo, realizar depósitos mensuales en una caja de ahorros que paga intereses capitalizables cada mes.	**Una anualidad general es aquella cuyo periodo de pago no coincide con el periodo de capitalización de los intereses. Por ejemplo, cuando se realizan depósitos quincenales en una cuenta de ahorros cuyos intereses se capitalizan cada mes.**

4. **Por último, si se utiliza el momento de inicio de la anualidad como criterio de clasificación, las anualidades deben ser:**

Inmediatas	**Diferidas**
La anualidad inmediata, es aquella en la que no existe aplazamiento alguno de los pagos, es decir, los pagos siempre se hacen desde el primer período de pago.	**Una anualidad diferida es aquella en la cual los pagos se difieren un cierto número de períodos. Por ejemplo, en la compra a crédito de una impresora, la cual se pagará en 12 abonos mensuales y el primer pago se llevará cabo tres meses después de la compra.**

Si se hace una combinación de cada uno de los criterios de clasificación, es posible formar 16 tipos de anualidades:

- **Anualidades ciertas, simples, vencidas e inmediatas.**
- **Anualidades contingentes, generales, vencidas y diferidas.**
- **Anualidades ciertas, simples, anticipadas y diferidas, etcétera.**

Las 16 combinaciones anualidades, las más comunes son:

- **Anualidades ciertas, simples, vencidas e inmediatas.**
- **Anualidades ciertas, simples, anticipadas e inmediatas, conocidas como anualidades anticipadas.**
- **Anualidades ciertas, simples, vencidas y diferidas, conocidas como anualidades diferidas.**

1. **¿Qué es una anualidad?**
2. **¿Cuáles son los cuatro criterios de clasificación de las anualidades?**
3. **¿Cuáles son los tres tipos más comunes de anualidades?**
4. **Una persona compra una bicicleta a 18 pagos quincenales de $172. Identifique la anualidad, el periodo de pago y el plazo de la anualidad.**
5. **Proporciona un ejemplo de una anualidad:**

a. Vencida.
b. Anticipada.
c. Vencida, diferida.
d. Anticipada, diferida.

ANUALIDADES VENCIDAS

Los 16 tipos de anualidades existentes, las anualidades ciertas, simples, vencidas e inmediatas, son las más utilizadas en el mundo financiero. A este tipo de anualidades vulgarmente se les conoce como anualidades vencidas u ordinarias.

El monto de una anualidad vencida, es el valor acumulado una serie de pagos iguales hechos al final de cada período de pago.

Por ejemplo, suponga que se depositan $5000 al final de cada mes en una institución financiera que paga una tasa de interés del 1.5% mensual capitalizable cada mes. ¿Cuál será el monto al cabo de 6 meses

	5000	5000	5000	5000	5000	5000
0	1	2	3	4	5	6 Fmeses

Donde F es el monto de la anualidad.

Observe que el “0” en el diagrama de tiempo corresponde al momento actual o presente y coincide con el inicio del mes 1 y a su vez coincide con el inicio del mes 2 y así sucesivamente.

El diagrama de tiempo anterior también se le conoce como diagrama de flujo de efectivo, o sea las entradas y

salidas de dinero. En este ejemplo se tiene como flujo de efectivo $5,000 mensuales durante seis meses.

Debido a que los depósitos se llevan a cabo al final de cada mes, los primeros $5,000 ganarán intereses por cinco meses, nunca por seis. Los segundos $5,000 ganarán intereses por cuatro meses. El último depósito hecho al final del mes seis no gana intereses.

El monto de la anualidad es la suma de todos los depósitos mensuales y su correspondiente interés compuesto, acumulado hasta el término del plazo.

Si la fecha focal se localiza al final del sexto mes, el monto de la anualidad se calcula como sigue:

5,000	x [	(1.015)^5 +	(1.015)^4 +	(1.015)^3 +	(1.015)^2 +	(1.015) + 1]	=	
		1.077284004	1.061363551	1.045678375	1.030225	2.015		
5,000	x	6.22955093					=	31,147.7546
	Menos:	Flujo de Efectivo						
		31,147.7546	-	(5,000 x 6)				
		31,147.7546	-	30,000.0000				1,147.7546

F = Monto de la Anualidad = 31,147.7546

Interés = 30,000.0000

Anualidad (-) Interés = 1,147.7546

Cuando el número de pagos o depósitos muy grande, el método anterior resulta muy laborioso.

Entonces hay que deducir una fórmula general para obtener el monto o valor futuro una anualidad cierta, simple, vencida e inmediata.

Considere usted una anualidad vencida en donde "A" es el pago o depósito hecho al final de cada uno de "n" periodos. "i" es la tasa de interés por el periodo, expresada en forma decimal, y "F" es el monto de la anualidad.

```
        A    A    A        A      A      A     A
|_____|____|____|________|______|_____ |_____|
0     1    2     3     (n-3)  (n-2)  (n-1)   n   meses
                                             F
```

Debido a que el primer pago se realiza al final del primer periodo, ganarán intereses (n-1) períodos. El segundo pago ganará intereses por (n-2) períodos, etcétera. El pago final no genera intereses. Si la fecha focal se localiza al final del periodo n1, entonces el monto o valor futuro de la anualidad está dado por:

$$F=A(1+i)^{n-1}+A(1+i)^{n-2}+A(1+i)^{n-3}+\dots+A(1+i)^3+A(1+i)^2+A(1+i)+A$$

Factorizando el lado derecho de la ecuación anterior:

$$F=A[(1+i)^{n-1}+A(1+i)^{n-2}+A(1+i)^{n-3}+\dots+(1+i)^3+(1+i)^2+(1+i)+1]$$

O bien:

$$F=A[1+(1+i)+(1+i)^2+(1+i)^3+\dots+(1+i)^{n-3}+(1+i)^{n-2}+(1+i)^{n-1}]$$

Los términos de la expresión entre corchetes forman la sucesión geométrica, donde:

$a1 = 1$

$r = (1 + i)$

La fórmula general para obtener el monto o valor futuro de una anualidad vencida es:

$$F = A \frac{[(1 + i)^n] - 1}{i}$$

Caso práctico:

A=	**5000**	**mensuales**
i=	**0.015**	**por cada mes**
n=	**6**	**meses**

$$F = \frac{5{,}000[(1+0.015)^6 - 1}{0.015}$$

$$F = 5{,}000 \left[\frac{((1+0.015)^6) - 1}{0.015} \right]$$

$$F = 5{,}000 \left[\frac{1.093443264 - 1}{0.015} \right]$$

$$F = 5{,}000 \left[\frac{0.093443264}{0.015} \right]$$

F=	**5,000**	**x**	**6.229550933**

F=	**31,147.75**

		((1+0.015)^6) - 1
F=	**5,000**	**-----------------------------**
		0.015

Un padre empieza a ahorrar para la su hijo pueda estudiar cuando crezca, una carrera universitaria.

Planea depositar 3,000 en una cuenta de ahorros al final de cada mes durante los próximos 8 años. Con una tasa de interés anual de 8.4%

¿Cuál será el monto al cabo de 8 años?

¿Cuánto serán los intereses?

Solución:

a- Se sobreentiende que la capitalización e mensual.

A=	3000		
i=	0.086	0.007166667 interés mensual	
	(se divide entre 12)		
n=	8 años		96 meses
	(se multiplica 8 x 12)		

F= 3,000 (((1+0.007)^96) - 1 / 0.007)

F= 3000 (1.95357088 -1 / 0.007)

F= 3000 136.2244114

F= 408,673.23 total con intereses

Ahorro	3000x96 meses	288,000.00
i=	408673.23 - 288,000	
i=	120,673.23	

Suponga usted que el depósito de 3000 mensuales se hace solo por cinco años, el resto del tiempo se depositan $3500 mensuales para compensar la inflación. Calcule el monto final y por otra parte el interés ganado.

F=		3000
n=	5x12	60

F= 3000 $\left(\frac{((1+.007)^{60})-1}{0.007} \right)$

F= 3000 x 74.248041

F= 222,744.12

Para obtener el monto final F, con fecha final del mes 96

F= 222,744.12 x (1+007)^36 + 3,500 $\left(\frac{(1+0.007)^{36}-1}{0.007} \right)$

F= 429,063.74

En 8 años depositó 306,000 (3,000x60)+(3,500x36) = 306,000

Entonces el interés ganado fue de

429,063.74 – 306, 000 = 123,063.74

Se hace una ecuación de valor

$$F=3{,}000\left(\frac{(1.007)^{60}-1}{0.007}\right) x\ (1.007)^{36}+3{,}500\left(\frac{1.007^{36}-1}{0.007}\right)$$

F= 286,330.2245 + 142,733.5166

F= 429,063.74

Hasta aquí se ha determinado el valor futuro de una anualidad vencida.